

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 marzo 1917.

A. RÒITI, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Biologia. — *Esistono diverse razze di fillossera della vite?*
Nota di B. GRASSI e M. TOPI.⁽¹⁾

Com'è noto, Börner ritiene che la fillossera della vite di Lorena rappresenti una razza biologica speciale, ch'egli propone di denominare var. *pervastatrix*. Su questo argomento egli ha fatto diverse pubblicazioni. Nella prima di esse (1910) egli ha portato, a sostegno della sua tesi, le seguenti osservazioni fatte appunto nella Lorena:

1) Le alate preferiscono deporre le loro uova su viti di Gamay piuttosto che su viti di Riparia \times Rupestris 3309; soltanto sulle prime egli ha potuto trovare uova d'inverno.

2) Deformazioni a guisa di galle si sono prodotte da radicecole, in serra, su foglie di viti nostrali, quantunque il fogliame di queste viti si intrecciasse con quello di viti americane, le quali sono rimaste senza galle.

3) Gallecole schiuse da uova d'inverno o delle successive generazioni hanno prodotto galle su viti nostrali (Gamay ed altre V. vinifera) e su Labrusca, mentre non le producevano o le producevano imperfette su altre sorta di viti americane (Riparia \times Rupestris 3309 e 101. 14, Rupestris Ganzin, ecc.), che nel Sud-Europa sono abbondanti portatrici di galle, nonostante che si fossero fatte ripetute prove d'infezione.

Dal complesso di questi ed altri simili fatti che per brevità tralasciamo, Börner deduceva che la fillossera, vivendo da circa 40 anni in Lorena sulle

⁽¹⁾ Tutta la parte sperimentale delle presenti ricerche deve a M. Topi. Le ricerche sono state fatte per incarico del Ministero d'Agricoltura.

viti europee, deve aver acquistato caratteri biologici, cioè, gusti, attitudini, ecc., diversi da quelli della forma originaria, e riteneva come quasi compiuta una specializzazione della fillossera della Lorena in una razza propria della vite europea e della Labrusca.

Noi nel 1912 gli obbiettavamo che Boiteau già nel 1875, a Villegouge (Francia), aveva trovato molto frequente l'uovo d'inverno sulle viti europee, sulle quali si sviluppavano benissimo anche le galle, cosicchè la pretesa razza in ogni caso sarebbe già esistita fin dai primi tempi dell'introduzione della fillossera. Aggiungevamo che le esperienze del Börner, per esser fatte in gran parte in serra e con scarso numero di larve fondatrici, non davano affidamento di rappresentare esattamente il fenomeno quale avviene in natura (del resto lo stesso Franceschini in speciali apparecchi, dove le alate e le sessuali avevano libera scelta, aveva ottenuta la deposizione di uova d'inverno anche su tralci di viti nostrali).

Infine richiamavamo l'attenzione sulla circostanza che è molto variabile il comportamento delle viti sia europee sia americane di fronte a gallecole certamente della stessa razza (tipico è il caso della *Rupestris* du Lot restata per tanto tempo immune da galle in diversi paesi, dove oggigiorno può presentarne o molte o soltanto poche, o continuare a non presentarne affatto, differenze che si possono manifestare in impianti anche prossimi l'uno all'altro e in terreno simile, ancorchè artificialmente si intervenga per provocare l'infezione.

Prima che scoppiasse la guerra, il Börner ha portato nuovi argomenti a favore della sua tesi, pur non negando la possibilità che la sua nuova razza (la sua *pervastatrix*) fosse già esistita in America sulla Labrusca e che di là sia stata introdotta in Europa.

Egli coltivò in vasi colla stessa terra un certo numero di talee tagliate tutte dalla stessa pianta madre e, a tempo opportuno, una metà venne infettata a Villers l'Orme, presso Metz, con fillossere lorenese; l'altra metà a Pagny sulla Moselle (località poco distante), con fillossere provenienti dal sud della Francia. Questo esperimento fu fatto contemporaneamente per varie sorta di vitigni.

Il risultato, veramente notevole, è stato questo: regolare formazione di galle e di nodosità a Pagny e assoluta immunità a Villers l'Orme per i seguenti vitigni:

Riparia Gloire di Montpellier

Riparia × *Rupestris* 107 Geisenheim

Riparia × *Rupestris* 3306 Couderc

Riparia × *Rupestris* 3309 Couderc

Cordifolia × *Rupestris* 19 Geisenheim

Riparia × Chasselas 24 Laq.

I tentativi fatti dall'A. per infettare i nominati vitigni colla fillossera lorenese riuscirono sempre vani, per quanto egli variasse le condizioni rispetto alla stagione, al terreno, all'ambiente (serra o vigna), ecc.

Questi fatti inaspettati ci hanno invogliato a fare ricerche nella stessa direzione, sperando che potesse venirne luce sul diverso progredire delle infezioni fillosseriche in Italia, ora celere o rapidissimo anche in zone nordiche, ora lento tanto al nord quanto in zone abbastanza meridionali.

Eravamo a conoscenza che nei vivai di viti americane posti sul Lago Maggiore il comportamento della fillossera gallecola non era lo stesso di quello rilevato nei vivai della Toscana o della Sicilia (Franceschini, Petri, Grassi) ⁽¹⁾. Intraprendemmo perciò degli esperimenti con la fillossera gallecola sviluppatasi sulle foglie di Clinton in vigne dei dintorni di Arizzano, presso Intra.

Gli esperimenti furono iniziati ad Alice Bel Colle e proseguiti a Nizza Monferrato — dentro una serra a vetri, in località non vitata —, zone abbandonate nei riguardi della lotta fillosserica e già devastate dalla infezione stessa. Le foglie con galle, che furono portate esclusivamente attraverso zone infette e in cui non si fa alcun lavoro antifillosserico, sono state sempre in ogni occasione racchiuse entro scatole di latta, ermeticamente ed appositamente saldate, chiuse a lor volta in altri involucri, dei quali uno esterno imbevuto di formalina.

Gli esperimenti si iniziarono alla fine di agosto del 1914 con due tentativi d'infezione. Le viti adoperate furono barbatelle nostrali, di Riparia \times Rupestris 3306 e 101.14, di Riparia tomentosa, di Mourvèdre \times Rupestris 1202 e di Bourrisquou \times Rupestris 93.5. Per provocare l'infezione si legavano ai tralci e si interravano al piede delle viti, foglie di Clinton con galle. Ambedue i tentativi rimasero infruttuosi, cioè nè si produssero galle nè si ebbe infezione alle radici. Rimase tuttavia il dubbio che l'infezione potesse essere non avvenuta sia per la scarsità del materiale adoperato (foglie con galle non abbondanti, frequenza di galle vuote, abbandonate, rarità di uova e di neonate), sia perchè le viti non si fossero trovate in adatte condizioni di vegetazione, anche per la stagione tardiva.

La prova fu ripresa nel 1915 in migliori condizioni. Non si poterono però iniziare prima dell'agosto, perchè ad Arizzano anteriormente a quest'epoca non è possibile trovare galle in abbondanza. Là, contrariamente a quanto avviene altrove, anche in estate avanzata sono rarissime le piante veramente piene di galle; da queste l'infezione passa alle viti più o meno

(¹) Ad Arizzano le galle, per quanto noi sappiamo, sono state osservate soltanto su Clinton, Vialla e Rupestris du Lot. Börner non accenna specificatamente a questi vitigni, pure riferendo in genere gli ibridi di Riparia \times Labrusca e la Vitis Rupestris tra quei vitigni che sono soggetti alle galle ed alle nodosità-tuberosità, per parte della fillossera lorenese.

prossima, adatte a portar galle (non, per esempio, per quanto noi abbiamo veduto, sull'Isabella, molto diffusa in quei contorni), ma non vi prende grande diffusione. Da un anno all'altro non sono le stesse piante che si caricano di galle. È quindi a supporre o che le uova d'inverno siano molto rare, o che soltanto pochissime gallecole, schiuse da uova d'inverno, arrivino a fissarsi ed a produrre galle fertili, e ciò soltanto per particolari condizioni della pianta ospite.

Abbiamo collà visto ripetuto il fatto, già osservato in Toscana e in Sicilia, di trovare tutte le neonate fissate su foglioline all'apice del tralcio, morte; sono frequenti gallecole in stadi più avanzati, morte senza deporre uova; frequentissime le galle imperfette e quelle abbandonate.

Colle galle raccolte in agosto cercammo di provocare, al modo solito, l'infezione di barbatelle in vaso di *Riparia Gloire*, di *Riparia tomentosa*, di *Riparia* × *Rupestris* 3309, 3306 e 101.14, di *Berlandieri* × *Rupestris* 301 A e di barbatelle di viti nostrali e di Isabella.

Verso la stessa epoca, volemmo fare anche una prova di confronto con galle raccolte nel Vivaio governativo di Ventimiglia, ripetendo su per giù l'esperimento di Börner di Pagny e di Villers l'Orme, tentando di infettare, cioè, con gallecole di diversa provenienza le stesse sorta di viti nelle medesime condizioni di ambiente. Anche questo esperimento venne fatto in condizioni di scrupolosa e assoluta sicurezza contro ogni diffusione, distruggendo alla fine dell'esperimento le viti stesse. Si sottoposero alle prove d'infezione barbatelle di *Riparia Gloire*, di *Riparia* × *Rupestris* 3309, 3306 e 101.14, di *Aramon* × *Rupestris* G. n. 1, di *Mourvèdre* × *Rupestris* 1202. Le galle infettanti furono raccolte principalmente su piante di 3309, ma anche su altri vitigni. S'intende che si usò ogni cautela per togliere di mezzo qualunque confusione tra gli esperimenti.

Le barbatelle, specialmente quelle dell'esperimento con la fillossera di Arizzano, si trovavano in condizioni ottime per l'attecchimento dell'infezione; tralci in via di sviluppo, abbondante capillizio radicale. Numerose erano le gallecole fra le neonate che uscivano dalle galle; si poteva osservare lungo i tralci il peregrinare delle neonate.

Su nessuna delle viti, che si è cercato di infettare col materiale di Arizzano, si è notata per tutto il mese di agosto la comparsa di alcuna galla, tanto che verso il 7 di settembre fu rinnovato il materiale infettivo, ma in poca quantità, non avendo potuto procurarcene di più.

Il 16 di settembre si notarono due piccole galle su due foglioline di *Riparia* × *Rupestris* 101.14. Avevano circa due mm. di diametro e si trovavano su foglioline larghe appena due cm.

Di queste due piccole galle, una rimase piccolissima; l'altra, marginale, si sviluppò un po' di più; più tardi scomparso ogni speranza che l'infezione gallecola si sviluppasse, le galle furono aperte e trovate vuote: le

gallecole, ben per tempo, dovevano averle abbandonate, scomparendo. Tutte le altre viti restarono immuni di galle.

Invece, su le barbatelle infettate con le galle raccolte a Ventimiglia, la infezione gallecola si sviluppò regolarmente sul 3309 e 3306; non si sviluppò sulla Riparia Gloire, nè sul 101.14 e nemmeno sull'Aramon X Rupestris e Mourvèdre X Rupestris; ma quest'ultimi due vitigni non si trovavano in adatte condizioni di vegetazione.

In ottobre facemmo un esame superficiale dell'apparato radicale delle barbatelle infettate con le galle di Arizzano; questo esame dette un risultato completamente negativo. Ci riservammo di fare una nuova ricerca più accurata nell'estate 1916, nella fiducia che una leggera infezione sarebbe allora diventata più evidente. Ma anche a questa esplorazione, tutte le viti, comprese le nostrali, risultarono immuni. Il loro apparato radicale era abbondantemente sviluppato.

Lo stesso esame superficiale nell'ottobre fu anche fatto alle barbatelle infettate con le galle di Ventimiglia. (Questo esame era fatto estraendo dal vaso il pane di terra racchiudente le radici ed esaminando le radici che si erano sviluppate alla superficie, fra questa e la parete del vaso). Risultarono infette il 3306 ed il 101.14; del 3309 non comparivano radici; della Riparia Gloire comparivano, ma erano imponenti; dell'Aramon X Rupestris e del Mourvèdre X Rupestris non comparivano radici. Tutte queste viti furono subito distrutte.

Le prove d'infezione con le galle raccolte presso Arizzano sono continuate nel 1916. Il 18 agosto abbiamo ritentata col metodo e con le precauzioni già indicate, l'infezione di barbatelle in vaso di Riparia Gloire, Riparia X Rupestris 3309, 3306 e 101.14 e di barbatelle di viti nostrali; le une e le altre in ottime condizioni di vegetazione. Il materiale infettante era discretamente abbondante. Abbiamo anche, in una vigna in piena distruzione fillosserica, avvolte ai tralci di una vite di Clinton (?) e di una vite di Pinot, contigua alla prima, alcune foglie piene di galle, sempre raccolte ad Arizzano.

Con galle raccolte a Ventimiglia su pianta di 3309 (s'intende sempre colle debite cautele) infettammo una sola barbatella in vaso di Riparia Gloire. Contrariamente all'esperienza dell'anno precedente, anche sulla Riparia Gloire si produssero galle ben formate, sebbene piccole ed in piccolo numero; si notava inoltre una grande quantità di punture necrosate, senza formazione di galle. Anche queste viti al termine dell'esperimento vennero distrutte.

L'infezione con le galle di Arizzano ha dato i seguenti risultati:

Immunità assoluta delle foglie di Riparia Gloire, di Riparia X Rupestris 3309 e 3306 e delle viti nostrali in vaso. Su Riparia X Rupestris

101.14, come l'anno precedente, poche piccolissime galle, tosto abbandonate appena appena iniziate e che quindi non hanno proceduto nel loro sviluppo.

Sulle foglie del Clinton (?) e del Pinot (vite francese), si sono pure prodotte poche piccole galle, anche queste presto abbandonate; è tuttavia da tener nota che le viti erano in piena vigna (v. sopra) e che la stagione era tardiva (fine agosto-settembre).

L'esame dell'apparato radicale delle viti in vaso, fatto il 24 settembre, ha mostrato che sono rimaste immuni tutte le viti americane (Riparia Gloire, 3309, 3306, 101.14); si sono invece infettate le viti nostrali. Tutte le viti hanno un bellissimo apparato radicale, con abbondantissime radici capillari.

Al momento attuale abbiamo riunite nello stesso vaso una barbatella di vite nostrale infettatasi, come si è detto, ed una americana immune, per seguire gli ulteriori progressi dell'infezione ⁽¹⁾.

Al punto in cui siamo di queste ricerche, ci pare si possa pervenire alle seguenti conclusioni:

Colle galle fillosseriche raccolte da viti di Clinton non è stato possibile, per tre anni consecutivi, infettare nè alle foglie nè alle radici, diversi vitigni americani, che in generale sono atti a portar galle e nodosità, le quali infatti vi si sviluppano, se si adoperano galle raccolte su altri vitigni, in altra regione. Solo, fra quelli sperimentati, la Riparia \times Rupestris 101.14 sembra avere una maggiore facilità a produrre galle, pur non avendone portata alcuna fertile. Le galle si producono con maggiore facilità su vitigni identici o simili (Clinton (?) nella vigna). Il comportamento delle viti nostrali di fronte alla stessa infezione non è, per riguardo alla produzione delle galle, identico per ogni varietà di vitigni (viti nostrali piemontesi in vaso e Pinot nella vigna).

Se volessimo seguire il Börner nel suo ordine di idee, potremmo ritenere che anche ad Arizzano esista una razza di fillossera che somiglia molto a quella della Lorena, colla sola differenza che la fillossera di Arizzano ha prodotto galle sterili sulle foglie della Riparia \times Rupestris 101.14, della quale non ha però infettate le radici, mentre questo stesso vitigno infettato colla fillossera di Lorena, non ebbe a mostrare traccia alcuna di galle, ma presentò infezione regolare alle radici.

(1) Dovendomi recare ad Arizzano per la raccolta di galle necessarie per le nostre esperienze, ho potuto molto facilmente constatare che anche là, nelle vigne infette, la fuoriuscita dal terreno delle neonate radichicole si effettua, come ovunque dove ne ho fatta ricerca. La mia indagine ad Arizzano è stata fatta verso la metà di agosto, dopo una pioggia che veniva ad interrompere un lungo periodo siccitoso. Il terreno della vigna in cui facevo le osservazioni, era ghiaioso e coperto di erba. Ciò nonostante, la fuoriuscita vi era abbondantissima, delle più numerose che io abbia veduto. Ormai tale fenomeno deve essere ritenuto generale per tutte le vigne fillosserate, salvo forse in terreni specialissimi (Topi).

Senonchè ci sembra più giusto di formulare un'ipotesi, la quale trovasi già negli sperimenti esposti un principio di conferma.

Non potrebbe darsi che per la continuazione del ciclo fino all'uovo d'inverno, le alate dovessero, almeno di regola, ovificare sulle foglie, o sulla corteccia di quello stesso vitigno, o di vitigni più o meno affini, sulle cui radici si sono sviluppate? e che il passaggio delle gallecole da vitigno a vitigno e conseguentemente la formazione delle galle fossero regolati da condizioni finora imprevedute (varietà, biotipi di vitigno predeterminato)?

Gli sperimenti di cui abbiamo riferito, esaminati con questo criterio convaliderebbero l'ipotesi; un'altra serie di fatti e di osservazioni, che passiamo ad esporre le darebbero già un ulteriore appoggio.

* * *

Sulle radici delle viti europee infette di fillossera si sviluppa, in maggiore o minore abbondanza a seconda di diverse condizioni, specialmente climatiche, la forma alata, la quale, sciamando, dovrebbe contribuire alla diffusione dell'insetto. Invece, come è noto, sulle viti nostrali la forma gallecola non compare, in generale. Quale è dunque il destino delle alate, che, specialmente nei vigneti infetti dell'alta Italia, si producono in grande abbondanza? È la gallecola, schiusa dall'uovo d'inverno, che non trovando viti adatte alla produzione delle galle, scompare e muore? Sono le alate che, non guidate dall'istinto, si disperdono senza deporre uova o le depongono a caso ed ovunque, in modo che i sessuati trovino difficoltà ad incontrarsi?

Per cercare di risolvere tali quesiti intraprendemmo nel 1915 alcune ricerche ed esperienze, le quali hanno avuto un esito, che non prevedevamo.

Abbiamo cominciato col coprire con stoffa due viti, in una vigna già devastata dalla fillossera, in modo da costituire come una gabbia a maglie fittissime. Le due viti scelte furono una vite nostrale ed una Clinton (?), che casualmente trovavasi nella vigna.

Entro queste gabbie portammo due volte al giorno, dal 10 agosto al 24 settembre, il maggior numero possibile di ninfe e di alate, che un operaio, all'uopo addestrato, riusciva a raccogliere. Le ninfe erano ricercate sulle radici di viti infette ed introdotte nella gabbia in scatole di vetro, senza toglierle dalla radice su cui si trovavano. Le alate erano raccolte nelle tele di ragno, frequentissime nei vigneti del Monferrato, e distaccate dalle tele stesse nel miglior modo, sì che potessero liberamente muoversi e volare; anche queste erano mantenute entro scatole di vetro, che venivano aperte quando le ponevamo entro la gabbia.

Con questa ricerca delle alate, confermammo quanto già avevamo osservato, che, cioè, le alate sciamano più facilmente nel pomeriggio: infatti tele di ragno, in cui al mattino non era impigliata alcuna alata, ne contenevano un buon numero nel pomeriggio. Abbiamo trovato delle tele di ragno con un centinaio circa di alate, vive o morte.

Abbiamo così introdotto nelle nostre gabbie, diverse centinaia di ninfe, non tutte mature e quindi capaci di trasformarsi, e di alate, non tutte vitali ed in istato di deporre uova.

Al tempo stesso ricercavamo alate, uova di sessuati, sessuati, ed uova d'inverno sotto le foglie e sui ceppi di vigne fillosserate; l'esito fu sempre negativo sulle viti nostrali. Le alate si vedevano non difficilmente sul terreno.

Le alate, in captività, depongono facilmente le uova ed è facile anche ottenere sessuati vivi e mobili.

Verso la fine di agosto facemmo ricerche di alate e sessuati sotto le foglie delle viti coperte, con esito negativo; non guardammo che poche cortecce del ceppo — con lo stesso esito —, nel dubbio di distruggere le uova d'inverno eventualmente presenti e che ci sarebbero state rilevate con maggior certezza la primavera successiva con lo sviluppo delle galle almeno sul Clinton (?).

Nell'inverno successivo la vite di Clinton non venne nemmeno potata. Nelle vigne fillosserate facemmo ricerca di uova d'inverno sulle viti nostrali, sempre con esito negativo.

Alla primavera 1916 ci attendevamo di veder comparir le galle, se non sulla vite nostrale, almeno sulla Clinton (?) coperta. Nessuna galla si è invece formata e neanche abbiamo potuto notare punture che, con tutta sicurezza, potessimo attribuire a gallecole; non si può tuttavia nemmeno escluderlo, giacchè è ben difficile distinguere, specialmente su viti nostrali, semplici punture di gallecole da simili lesioni prodotte da altri insetti (*Drepanothrips*).

Come spiegare la mancata infezione gallecola? Si potrebbe sospettare che neanche quella Clinton (?), d'incerta origine, fosse atta a portar galle e che quindi, tanto su questa che sulla vite nostrale, le gallecole, schiuse da eventuali uova d'inverno, siano andate perdute.

Oppure ci soccorre un'altra ipotesi, che, come abbiamo detto, viene a lumeggiare le ricerche riferite nella prima parte di questa Nota: che, cioè, per produrre l'infezione gallecola, sia necessario non solo che il vitigno sia suscettibile di produrre galle, ma anche che l'infezione *passi* prima sulle radici del vitigno da infettare, o che si adoperino galle provenienti dallo stesso vitigno, o da determinati vitigni.

Un fatto, rilevabile nella stessa vigna, ci conforta in questa opinione: in quella vigna, semidistrutta dalla fillossera, sono coltivate qua e là viti americane selvagge di diversa sorta; vi sono anche una ventina circa di piante di produttori diretti, ormai adulte. Eppure l'infezione gallecola non si è ancora manifestata! Se le viti americane o ibridi avessero una sorta di attrazione per le alate, non avrebbe dovuto mancare di prodursi.

Nello scorso settembre, esaminando quella Clinton (?), di cui abbiamo parlato, abbiamo notato sotto le foglie tre alate. Ciò non era mai avvenuto in osservazioni precedenti. È da notarsi in proposito che la Clinton (?) era

molto probabilmente immune alle radici fino all'anno scorso ed è quest'anno infetta; così potrebbe spiegarsi la presenza delle alate.

Da un punto di vista più generale, è noto che l'infezione gallecola è sempre comparsa in un paese od in una regione posteriormente — ed anche di diversi anni — all'infezione radicolica. Così in Sicilia, in Piemonte, in Puglia, in Toscana. Non si può ciò spiegare con il necessario passaggio attraverso alle radici delle viti americane? Se le viti americane esercitassero un'attrazione per le alate di qualunque provenienza, non si potrebbe spiegare l'assenza di galle in vigneti di piante madri di viti americane contigui ad infezioni fillosseriche, come accade per tanti vivai delle Puglie.

All'epoca in cui avevamo il nostro Osservatorio a Fauglia, comparve un'infezione gallecola in località non molto distante. Evidentemente doveva trattarsi di barbatelle già infette provenienti dalla Francia, sulle quali presto si produsse quindi l'infezione gallecola.

Più recentemente abbiamo avuto occasione di visitare a Villafranca d'Asti, in zona immune da fillossera, un vigneto di piante madri di viti americane infetto di galle. È quasi sicuramente provato che si tratta di un impianto fatto con barbatelle infette.

Questi fatti, che citiamo a solo titolo di esemplificazione, potrebbero facilmente moltiplicarsi. Ma solo dopo altre esperienze, già in corso, si potrà pervenire a conclusioni definitive e trovare la spiegazione di altri risultati di nostre esperienze, che sembrerebbero in contraddizione con i fatti che abbiamo citato.

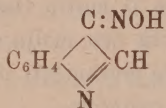
Chimica. — *Sopra il nero di nitrosopirrolo*. Nota del Socio A. ANGELI e GUIDO CUSMANO.

In due lavori pubblicati recentemente in questi Rendiconti ⁽¹⁾ venne dimostrato che il pirrolo, ossidato nelle opportune condizioni, fornisce con grande facilità un prodotto intensamente colorato, che chiamammo *nero di pirrolo*, i caratteri ed il comportamento del quale presentano una sorprendente analogia con alcune melanine naturali. Ma nel corso delle nostre ricerche abbiamo avuto occasione di osservare che il pirrolo stesso, anche per azione di altri reattivi può dare origine a prodotti molto colorati, che però nella loro composizione differiscono naturalmente dal precedente; ma siccome la differenza di composizione non esclude eventuali analogie di struttura, così noi abbiamo giudicato opportuno di prendere in esame anche queste sostanze, giacchè dal loro studio si potranno avere nuovi dati i quali

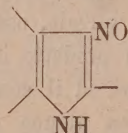
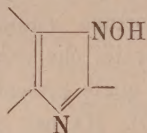
(¹) Questi Rendiconti (1915), vol. XXIV, sem. 2°, pag. 3; (1916), vol. XXV, sem. 1°, pag. 761.

contribuiranno a loro volta a stabilire la costituzione del nero di pirrolo stesso.

Noi abbiamo iniziate le nostre esperienze dai prodotti che il pirrolo fornisce per azione dell'acido nitroso. Le prime esperienze, eseguite da coloro che ci hanno preceduti in questo campo, non hanno portato a nessuna conclusione; così nel trattato del Beilstein si trova solamente il dato che il pirrolo non fornisce una nitrosammina. Solo molto più tardi è stato dimostrato ⁽¹⁾ che gli indoli per azione dell'acido nitroso, ovvero dei nitriti alcoolici, in presenza di etilato sodico, forniscono composti che si devono considerare come sali di *isonitrosoderivati*:



Successivamente si è potuto stabilire che anche i derivati del pirrolo ed il pirrolo stesso danno prodotti perfettamente analoghi ed ai quali perciò si deve attribuire la stessa costituzione. Nel caso degli indoli, dai sali così ottenuti per azione di acidi deboli (acetico, carbonico, borico) facilmente si possono avere i composti allo stato libero; alcuni sono stabilissimi, come quello p. es. che deriva dal solito fenilindolo; altri invece sono più o meno alterabili; lo stesso vale per i corrispondenti derivati ottenuti dai pirroli, dei quali quelli contenenti gruppi fenilici sono assai stabili, mentre invece quelli che derivano da pirroli sostituiti con radicali alifatici si alterano con grande facilità; alcuni anzi quando si cerca di metterli in libertà dai loro sali, si colorano fugacemente in *verde* e poi tosto si decompongono in modo profondo. La comparsa di questa colorazione verde, che in certe condizioni si può osservare anche nel caso del derivato dell' α -metilindolo, accenna che senza dubbio in una prima fase l'ossima passa per la forma del vero nitrosoderivato:



Nel caso del sale sodico dell'isonitrosopirrolo, quando si cerca di avere il prodotto allo stato libero, la trasformazione successiva si compie in modo così rapido che non è nemmeno dato di percepire la colorazione verde che si osserva in altri casi: infatti, quando si acidifica la soluzione acquosa del sale sodico dell'isonitrosopirrolo, il liquido giallo aranciato pone al bruno e

⁽¹⁾ Angeli, Memorie Lincei (1911), pag. 437.

poi si separa una polvere finissima, intensamente colorato in nero e che per brevità, anche per differenziarla dal prodotto descritto lo scorso anno, chiameremo *nero di nitrosopirrolo*.

Per ottenere questo nuovo prodotto, si parte da una soluzione acquosa del sale sodico del nitrosopirrolo, che si prepara nel miglior modo seguendo il metodo a suo tempo descritto, facendo reagire il nitrito di etile sopra una soluzione alcoolica di pirrolo, raffreddata con ghiaccio, in presenza di etilato sodico. Il pirrolo da noi adoperato venne purificato per mezzo del sale potassico.

Nel domani, quando il liquido si è quasi tutto rappreso in una massa aranciata, cristallina, costituita dal sale sodico del nitrosopirrolo, si aggiunge un po' di acqua in modo da avere soluzione limpida, che poi si estrae ripetutamente con etere allo scopo di esportare il pirrolo ed il nitritoalcoolico che eventualmente non hanno ancora reagito. Il liquido acquoso viene diluito con altra acqua e quindi sottoposto ad una corrente di anidride carbonica; il colore della soluzione, dapprima giallo aranciato, passa al bruno e poi si separa una polvere nera, finissima che viene raccolta su filtro e lavata molte volte con acqua ⁽¹⁾.

Dal liquido acquoso da cui si è separata la polvere nera, per aggiunta di acido acetico, si ottiene un'altra quantità di prodotto. Anche l'etere che ha servito per le estrazioni, per aggiunta di poco acido solforico diluito, dopo qualche tempo fornisce ancora una polvere nera, che sembra però diversa dalle precedenti e che ancora non abbiamo esaminata.

Il prodotto così ottenuto è pressochè insolubile in tutti i solventi; si scioglie invece facilmente negli alcali e dalle soluzioni viene riprecipitato per azione degli acidi. Per l'analisi venne impiegato il prodotto ottenuto direttamente per azione dell'anidride carbonica e lavato a lungo con acqua. Una seconda combustione venne eseguita sopra lo stesso prodotto bollito con alcool; in entrambi i casi la sostanza fu seccata a 100° fino a costanza di peso.

Il nero di nitrosopirrolo, a temperature elevate deflagra, ma senza fondere e nello stesso tempo si sviluppano vapori rossi; per questa ragione la combustione si deve eseguire con la maggior cautela.

Sostanza lavata con acqua e seccata a 100°:

gr. 0,1787 diedero gr. 0,3319 di CO₂ e gr. 0,0582 di H₂O.

In 100 parti;

C	50,65
H	3,61

(1) La stessa polvere nera si forma anche facendo reagire sul pirrolo il nitrito etilico ovvero l'acido nitroso.

Sostanza esaurita con alcool bollente e seccata a 100°:

gr. 0,1422 diedero gr. 0,2620 di CO₂ e gr. 0,0437 di H₂O.

In 100 parti:

C	50,24
H	3,41

Data la proprietà della sostanza da decomorsi per azione del calore con sviluppo dei vapori rossi, lasciando indietro un residuo nero che abbrucia con grande difficoltà, prima che col metodo di Dumas abbiamo tentata una determinazione di azoto col metodo di Kjeldahl.

Gr. 0,1116 diedero gr. 0,03257 di azoto.

In 100 parti:

N	29,18
---	-------

La composizione del prodotto si approssima per ciò a quella della formula più semplice:



la quale richiede:

C	50,53
H	3,15
N	29,52

e poco differisce da quella del nitrosopirrololo di partenza:

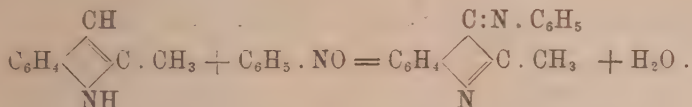
C	50,00
H	4,16
N	29,16

La sostanza, come si è detto, si scioglie facilmente negli alcali; tali soluzioni vengono immediatamente ossidate per azione del permanganato; per azione dei riducenti si scolorano e poi all'aria imbruniscono nuovamente.

Le poche esperienze preliminari finora eseguite naturalmente sono ben lungi dal permetterci di fissare la costituzione del prodotto; senza dubbio si tratta di un polimero della forma più semplice prima riferita, il quale potrà anche contenere qualche atomo in più od in meno; un'idea della grandezza molecolare si potrà avere solamente dallo studio degli eteri ovvero dei sali.

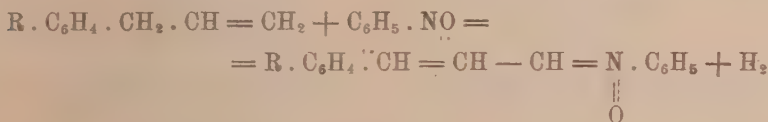
Ma però d'ora da ora si può formarsi un criterio almeno approssimato sul modo più probabile secondo cui sono fra di loro congiunti i residui pirrolici.

Come risulta da ricerche eseguite alcuni anni or sono ⁽¹⁾, i veri nitrosoderivati reagiscono facilmente con gl'indoli ed anche coi pirroli; così p. e. metilindolo e nitrosobenzolo forniscono il prodotto:



In questo caso il nitrosoderivato si comporta quindi in modo analogo all'acido nitroso; ma queste reazioni avvengono in mezzo alcalino e sono accompagnate da eliminazione di acqua: il processo non dà perciò l'immagine di quello che ci riguarda, il quale invece si approssima molto ad un'altra reazione che si compie fra nitrosoderivati e composti non saturi e che è stata descritta alcuni anni or sono in questi Rendiconti ⁽²⁾.

Si è potuto, infatti, allora stabilire che il nitrosobenzolo reagisce con tutta facilità a freddo ed anche in soluzione molto diluita sopra i composti non saturi; così p. e. impiegando i composti aromatici a catena allilica si perviene nettamente ad eteri N—fenilici di ossime:



e l'idrogeno che si libera riduce una parte del nitrosobenzolo ad azossibenzolo. Come si vede in questa reazione l'ossigeno del nitrosobenzolo rimane a suo posto e nello stesso tempo avviene eliminazione di idrogeno. Il processo rassomiglia perciò a quello che si compie nella trasformazione del nitrosopirrolo in nero di nitrosopirrolo, soprattutto quando si pensi che il vero nitrosopirrolo oltre al gruppo —NO contiene anche doppi legami; che d'altra parte il gruppo =NO possa esercitare le funzioni del carbonile è stato posto in rilievo alcuni anni or sono ⁽³⁾ da uno di noi e recentemente anche da Pfeiffer ed allievi. L'unione degli anelli pirrolici è perciò molto probabilmente effettuata da questi gruppi.

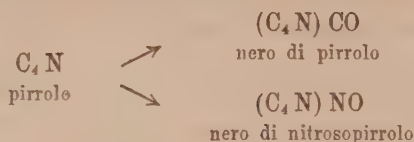
Perciò, sebbene non sia ancora nota la struttura del nero di pirrolo e quella del nero di nitrosopirrolo, e nemmeno la loro esatta composizione centesimale, tuttavia fino da ora si può porre in rilievo una analogia almeno approssimata che si riferisce alla loro formazione. Tenendo conto infatti di quanto è stato esposto nelle Note che riguardano il primo e di quanto si

(1) Questi Rendiconti (1908), vol. XVII, sem. 1°, pag. 697.

(2) Questi Rendiconti (1910), vol. XIX, sem. 1°, pag. 650.

(3) Questi Rendiconti (1906), vol. XV, sem. 2°, pag. 761.

è detto ora per il secondo, limitandoci a considerare il carbonio e l'azoto pirrolici, avremo:



Riprenderemo lo studio di questi prodotti appena le circostanze ce lo permetteranno.

Cristallografia. — *Sulla formazione di geminati.* Nota del Socio CARLO VIOLA.

La figura normale di un cristallo sottoposto ad accrescimento libero è determinata dalla legge di Curie ⁽¹⁾, secondo la quale gli accrescimenti perpendicolari $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r, \dots, p_n$ alle facce sono proporzionali direttamente alle rispettive costanti capillari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_r, \dots, \alpha_n$, ossia

$$(1) \quad p_1 : p_2 : p_3 : \dots : p_r : \dots : p_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \dots : \alpha_r : \dots : \alpha_n.$$

Si moltiplichino termine a termine per le rispettive aree delle facce $s_1, s_2, s_3, \dots, s_r, \dots, s_n$, e si eseguisca la sommatoria sul contorno, si ottiene

$$\begin{aligned}
 (2) \quad p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p_r s_r + \dots + p_n s_n = \\
 = C \{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_r s_r + \dots + \alpha_n s_n \},
 \end{aligned}$$

essendo C una costante di proporzionalità.

Il membro a sinistra di quest'equazione non è che una quantità proporzionale al volume del cristallo, che diremo V ; il membro a destra nella parentesi è la tensione o energia superficiale del cristallo, che diremo E_0 , sicchè

$$(3) \quad V = C E_0.$$

Qui si intende E_0 l'energia minima possibile per dato volume V , essendo questa la condizione della legge di Curie; ossia per ogni accrescimento del cristallo il volume è proporzionale alla minima energia superficiale. non altrimenti si avrebbe equilibrio stabile di contatto fra la fase amorfa e il cristallo, come precisamente vogliono le condizioni, sulle quali si basa la legge delle fasi di Gibb.

⁽¹⁾ C. Viola, R. Accademia dei Lincei, 1916, Rendiconti, II, pag. 401.

Solamente nel caso, in cui il sistema si trovi in istato irriversibile, l'accrescimento del cristallo non avrà luogo secondo la legge di Curie, la figura di esso non sarà normale e l'eguaglianza (3) non potrà verificarsi. Io rilevai già un caso di anormalità nella figura del cristallo, forse la più importante, al quale diversi possono essere ricondotti; gli è quando facce a indici grandi prendono accrescimenti anormali e si sostituiscono a facce aventi costanti capillari piccole; e considerai le circostanze, che si possono avere per ristaurare simili anormalità, nel supposto che non vi sia variazione di energia interna. Ma aggiunsi ancora che il ristauo di cristalli anormali devono poter ottenere per mezzo di geminazioni.

Poniamo il caso semplicissimo che una sola delle facce del cristallo abbia assunto una estensione superiore a quella, che essa avrebbe, se la tensione superficiale fosse minima; ciò induce a indicare che qualcuna delle condizioni di equilibrio sia rotta. Fra tutte le facce $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_r, \dots, \sigma_n$ che si verificano sul contorno del cristallo, sia precisamente la faccia σ_r quella che ha assunto un'area S_r maggiore della faccia s_r , che corrisponde alla costante capillare α_r ; chiameremo S_r faccia o area anormale. Naturalmente se $S_r > s_r$, significa che l'accrescimento perpendicolare a σ_r è stato rallentato, ossia in luogo di p_r sia p'_r , essendo $p'_r < p_r$. Posto nella (2) $p'_r S_r$ in luogo di $p_r s_r$ e $\alpha_r S_r$ in luogo di $\alpha_r s_r$, avremo

$$(4) \quad p_1 s_1 + p_2 s_2 + \dots + p'_r S_r + \dots + p_n s_n < \\ < C \{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_r S_r + \dots + \alpha_n s_n \}.$$

Essendo la costante C rimasta la medesima; per le premesse fatte è evidente che in luogo dell'eguaglianza (2) si abbia la disegualià (4).

Il membro a sinistra di essa è ancora sempre proporzionale al volume V del cristallo: la somma in parentesi del membro a destra è l'energia totale superficiale che diremo E , maggiore di E_0 , sicchè

$$(5) \quad V < C E.$$

Questo risultato dimostra che l'energia superficiale diviene proporzionale al volume V del cristallo nell'istante, in cui è minima. In questa elegante espressione è tradotta la legge di Curie, ovvero la legge di Hauy sulla razionalità degli indici semplici.

Se la perturbazione, causa dell'anormale accrescimento del cristallo, persiste, la figura rimarrà anormale; se essa sarà soppressa, il cristallo poco a poco si adatterà, come una massa pastosa sotto l'azione esclusiva della tensione superficiale per riprendere intine la figura normale, dissolvendosi in quelle direzioni, secondo le quali esso aveva troppo cresciuto, e sviluppandosi là dove aveva rallentato. Ma un altro fenomeno può contempo-

raneamente avvenire, che sulla faccia S_r troppo estesa (anormale) venga a posarsi e a crescere un secondo individuo, il quale come il precedente abbia avuto la corrispondente faccia S'_r troppo sviluppata, persistendovi la medesima causa.

* * *

Consideriamo dunque due cristalli di sviluppo press'a poco eguale, i quali siano venuti a coprirsi con la comune faccia S_r dell'uno ed S'_r dell'altro, venendo così a diminuire la loro tensione superficiale comune in contatto con la fase amorfa, come precisamente farebbero due gocce sferiche perfettamente libere nel loro moto; la fusione di due gocce eguali in una avrebbe per risultato di ridurre la loro area sferica complessiva a circa $\frac{4}{5}$, e in questo rapporto eziandio la tensione superficiale.

Scriveremo per il secondo cristallo una espressione analoga alla (4); le stesse lettere con apice indichino gli stessi oggetti e le corrispondenti costanti per questo cristallo, ossia:

$$(6) \quad p'_1 s'_1 + p'_2 s'_2 + \dots + p'_r s'_r + \dots + p'_n s'_n < \\ < C \{ \alpha'_1 s'_1 + \alpha'_2 s'_2 + \dots + \alpha'_r s'_r + \dots + \alpha'_n s'_n \}.$$

Trattandosi di due cristalli perfettamente analoghi e di eguale sviluppo in tutte le loro parti, potremo considerare le rispettive distanze perpendicolari p_1, p_2, p_3, \dots eguali rispettivamente alle distanze p'_1, p'_2, p'_3, \dots e così dicasi delle aree e delle loro costanti capillari. Inoltre avvenendo il contatto di due individui nelle facce S_r e S'_r , sarà conveniente e necessario assumere su detta faccia il comune origine O, donde si computano gli accrescimenti. Sarà allora $p_r = p'_r = 0$, e la somma delle (4) e (6) ci darà

$$2 \{ p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3 + \dots + p_n s_n \} < \\ < C 2 \{ \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \dots + \alpha_n s_n \} + \alpha_r C [S_r + S'_r].$$

Naturalmente il membro a sinistra è proporzionale al volume totale dei due cristalli; quello a destra senza la costante C è l'energia superficiale complessiva, che può variare come varia il binomio $\alpha_r(S_r + S'_r)$.

Tanto S_r di un cristallo quanto S'_r dell'altro si dividono in due parti, in quella di contatto e quella libera. La prima $(S_r)_1 = (S'_r)_1$ è la stessa per i due cristalli; la seconda $(S_r)_2$ e $(S'_r)_2$ è pure press'a poco la stessa, ritenendo che i due cristalli abbiano circa lo stesso sviluppo. Fra le aree $(S_r)_1$ e $(S'_r)_1$, essendo reciprocamente coperte, vi è una costante capillare α'_r , in generale diversa di α_r , la quale esprime il lavoro che è necessario spen-

dere per aumentare di una unità la superficie di contatto $(S_r)_1$, sicchè potremo scrivere

$$\alpha_r(S_r + S'_r) = 2\alpha'_r(S_r)_1 + 2\alpha_r(S_r)_2.$$

Rifacciamo ora le condizioni di equilibrio per una piccolissima variazione nelle singole aree del contorno del cristallo, supposto che questo rimanga in contatto con la fase amorfa senza sensibile aumento di volume. Per quello che si è precedentemente detto ⁽¹⁾, le condizioni di equilibrio stabile saranno le seguenti:

$$(7) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{i=n} p_i \delta s_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \delta s_i + \alpha'_r \delta(S_r)_1 + \alpha_r \delta(S_r)_2 = 0; \end{cases}$$

dalle quali si ottiene in primo luogo la relazione che ripete la legge di Curie per ciascuno dei due cristalli in contatto, ossia:

$$(8) \quad p_1 : p_2 : p_3 : \dots : p_n = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 : \dots : \alpha_n;$$

in secondo luogo esse forniscono ancora

$$(9) \quad \alpha'_r \delta(S_r)_1 + \alpha_r \delta(S_r)_2 = 0,$$

che integrata dà precisamente

$$(9_a) \quad \alpha'_r(S_r)_1 + \alpha_r(S_r)_2 = \text{costante}.$$

Se si considera l'accrescimento a partire dall'origine del cristallo geminato, questa costante è naturalmente zero; sicchè si potrà scrivere senz'altro, invece della (9_a), la condizione seguente da aggiungersi alle (8) per rendere minima la tensione superficiale per un dato volume:

$$(10) \quad \alpha'_r(S_r)_1 + \alpha_r(S_r)_2 = 0.$$

Ma è da osservarsi che α'_r è quantità piccolissima e trascurabile; essa inoltre tende a zero, quando i due cristalli sono in tale contatto da ritenersi l'uno la continuazione dell'altro. La condizione di equilibrio (10) esprime che la parte di area $(S_r)_1$ di contatto deve essere grande, come all'opposto per l'area libera si dovrà avere

$$(11) \quad (S_r)_2 = \text{minimo o zero}.$$

⁽¹⁾ C. Viola, R. Accademia dei Lincei. 1916, Rendiconti, II, pag. 401.

Affinchè la condizione (10) sia possibile, è necessario che per ogni aumento di $(S_r)_1$ corrisponda una adeguata diminuzione di $(S_r)_2$, il che è anche naturale. In ogni modo considerando i loro valori assoluti, la (10) esprime appunto la relazione

$$(12) \quad (S_r)_1 : (S_r)_2 = \frac{1}{\alpha'_r} : \frac{1}{\alpha_r} ;$$

ossia l'area legata e l'area libera sono inversamente proporzionali alle rispettive costanti capillari.

Sarà precisamente $(S_r)_2 = 0$ e perciò $\alpha'_r = 0$ quando le rispettive aree S_r e S'_r dei due individui saranno identicamente ricoperte, il che sarà sempre realizzabile, ove i due cristalli siano in associazione parallela. Di più esse condizioni saranno soddisfatte eziandio nel caso, in cui i due individui si trovino in posizione emitropa; la quale si ottiene dalla prima, girando di 180° nel piano comune $S_r = S'_r$ uno dei due individui per rispetto all'altro.

La conclusione a cui si arriva in seguito a questi sviluppi, così si può riassumere:

L'equilibrio stabile di contatto fra più cristalli e la fase amorfa è raggiunto, quando essi si trovino sovrapposti in posizione di geminazione o in posizione parallela; posizioni che diremo brevemente di congiunzione.

Si intende da quanto è stato detto sopra, che la superficie di contatto o di associazione è una faccia, che ha subito durante l'accrescimento degli individui uno sviluppo superiore a quello ad essa dovuto in forza della legge di Curie o di Haüy. Finchè infatti la cristallizzazione non sia perturbata, la figura che il cristallo conserva allo stato reversibile è normale; nè vi è ragione che in questo stato altri centri di cristallizzazione si formino. Il che vale:

Le figure anormali dei cristalli esclusivamente possono dar luogo a geminati.

*
* *

Passiamo ora ad esaminare il procedimento dinamico che si può immaginare avvenga nella formazione di un geminato.

A tal fine partiamo dal supposto che il centro di cristallizzazione di un secondo cristallo si formi sulla superficie anormale del primo, e che il secondo individuo inizi il suo accrescimento in modo affatto arbitrario, ma tale che le superficie S_r e S'_r siano in contatto.

Se le superficie anormali legate S_r ed S'_r si coprano identicamente, come avviene in una delle due posizioni di congiunzione, l'energia superficiale raggiungerà un minimo, e l'equilibrio sarà stabile. Ogni posizione intermedia corrisponderà ad energia superficiale maggiore della minima, e l'equilibrio

sarà rotto. Nondimeno fra tutte le possibili posizioni intermedie, vi è una per la quale l'energia superficiale è massima. quando cioè

$$(S_r)_z = \text{massimo}$$

compatibilmente con la legge di Curie per i due individui.

Questa speciale posizione intermedia, che chiameremo di *quadratura* si ottiene naturalmente, girando uno dei due individui per rispetto all'altro nel piano comune S_r dell'angolo di 90° a partire da una delle due posizioni di congiunzione. Si comprende che la posizione di quadratura non è altro che una posizione di *equilibrio instabile*: se i due individui uscissero da essa, anche di pochissimo, si troverebbero trasportati in una o nell'altra delle due posizioni di congiunzione o di stabilità. Possiamo così concludere:

Le posizioni di equilibrio di due individui identici sovrapposti secondo una superficie anormale sono tre: due di esse, dette di congiunzione, corrispondono ad equilibrio stabile o stato reversibile, la terza è di quadratura e corrisponde ad equilibrio instabile o stato irreversibile.

Nella meccanica è comune il caso di incontrare un sistema in equilibrio stabile o instabile. Un pendolo p. es. nella sua posizione ordinaria col centro di gravità sotto al centro di sospensione si trova in equilibrio stabile, poichè spostato da essa di poco o di molto, ritorna nella sua posizione primitiva. All'incontro un pendolo capovolto col centro di gravità verticalmente sopra al centro di sospensione si trova in equilibrio instabile; poichè spostato di pochissimo da essa posizione, continua il suo moto fino a raggiungere la posizione stabile. Analogo stato di cose si avverte precisamente fra due cristalli aventi una faccia di contatto: che essi tendono ad assumere una delle due posizioni di equilibrio stabile, anche allorchando si trovino nella posizione di equilibrio instabile, purchè per una qualunque ragione siano levati da essa anche di pochissimo. È chiaro che teoricamente i due cristalli raggiungerebbero la posizione instabile in un tempo infinito, sempre che le condizioni siano a tal fine favorevoli.

Fra tutte le infinite posizioni che due cristalli in contatto possono avere fra di loro, le più probabili sono certamente le posizioni intermedie perchè frequenti; la meno probabile è quella corrispondente ad equilibrio instabile. Le posizioni di equilibrio stabile sono solamente due, epperò sono molto meno probabili che tutte le posizioni intermedie prese insieme; ma poichè ogni posizione intermedia deve alla fine risolversi in una posizione di congiunzione, queste ultime dovranno più facilmente ripetersi in natura, purchè ci sia il tempo sufficiente per la risoluzione e la successiva ricristallizzazione in modo che ad ogni istante la deformazione sposti i due individui l'uno per rispetto all'altro di un angolo sia pure piccolissimo.

Raggiunta una volta la congiunzione nei due individui, l'accrescimento del geminato può continuare imperturbato in relazione con la legge di Curie.

Solamente in seguito ad un secondo accrescimento anormale si può formare un terzo individuo, e poi un quarto e così via, ripetendosi la stessa legge di geminazione, se le stesse circostanze causanti le anomalie si ripetano identicamente.

* *

La ripetizione della stessa geminazione innumerevoli volte sarà estremamente probabile per non dire impossibile, poichè è quasi impossibile che le identiche condizioni si rinnovino innumerevoli volte. Per questa ragione si deve presumere che i poligeminati e le mimesse, come si osservano benissimo in vari cristalli tipici, quali la leucite, l'analcime, i granati, i feldspati triclinici e monoclinali, la berandite, alcune cloriti ecc. ecc. devono avere un'altra origine. L'ipotesi che più naturalmente si presenta è quella del polimorfismo.

Esaminiamo appunto una sostanza avente due modificazioni cristalline; per una data temperatura e pressione una modificazione passa bruscamente nell'altra. A causa di siffatta trasformazione la struttura del cristallo cambia, ma ne rimane la figura esterna. Facciamoci prima a considerare una data modificazione e la figura normale a lei propria. Siano $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ le distanze perpendicolari di accrescimento computate da un'origine O delle facce di esse $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$, le cui aree siano rispettivamente $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ e le rispettive costanti capillari $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$. Ammesso l'equilibrio stabile, come si è detto, e quando lo stato reversibile si avrà

$$(18) \quad p_1 S_1 + p_2 S_2 + p_3 S_3 + \dots + p_n S_n = \\ = C \{ \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3 + \dots + \alpha_n S_n \},$$

essendo C la costante di proporzionalità.

Consideriamo ora la seconda modificazione della stessa sostanza, che come si è detto, avviene a una data temperatura e pressione e per un certo consumo e produzione di calore. Posto ciò, il membro a sinistra della (18), rappresentante il volume totale del cristallo non subisce alcuna variazione.

Ma ognuna delle facce $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ si scomporrà in generale in parecchie. La area s_1 , p. es. avente la costante capillare α_1 si scomporrà in $s'_1, s''_1, s'''_1, \dots$ con le rispettive costanti capillari $\alpha'_1, \alpha''_1, \alpha'''_1, \dots$; l'area s_2 analogamente si scomporrà in $s'_2, s''_2, s'''_2, \dots$ con le rispettive costanti capillari $\alpha'_2, \alpha''_2, \alpha'''_2, \dots$ e così via. La area s_n si scomporrà nelle aree parziali $s'_n, s''_n, s'''_n, \dots$ con le rispettive costanti capillari $\alpha'_n, \alpha''_n, \alpha'''_n, \dots$. Durante una siffatta trasformazione il processo può essere reversibile, p. es. se il consumo di calore di trasformazione venga riguadagnato identicamente nella

modificazioni, come nei feldispati hanno una faccia comune della stessa densità — e le innumerevoli geminazioni hanno per faccia di associazione la faccia della stessa densità.

Riassumendo ora i due sviluppi secondo i quali si possono formare i geminati e i poligeminati, l'uno in base alla trasformazione della fase amorfa in fase cristallina, l'altro in base alla trasformazione di due modificazioni cristalline, l'una nell'altra, della stessa sostanza dimorfa, vien fatto di pensare che un poligeminato o un cristallo cosiddetto mimetico altro non può rappresentare che una modificazione di una sostanza dimorfa ancorchè non ne sia dimostrato il dimorfismo, o brevemente:

Un poligeminato finissimo o un cristallo mimetico è sempre una modificazione di una sostanza dimorfa.

Per diversi cristalli questa legge è dimostrata p. es. la leucite, la boracite, alcune zeoliti ecc.; per altre sostanze questa legge è supposta p. es. il microclino, l'ortoclasio, ecc.

Matematica. — *Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico.* Nota del Corrispondente O. TEDONE.

1. In questa Nota vogliamo dare una dimostrazione semplice e diretta delle formole che esprimono il principio di Huygens in un campo elettromagnetico nella credenza che una tale dimostrazione possa interessare i cultori della fisica teorica.

Il nostro campo elettromagnetico esista in un dielettrico omogeneo ed isotropo, di cui indichiamo con ε e μ la costante dielettrica e la permeabilità magnetica. Richiamando, quindi, notazioni già altra volta adoperate, indichiamo, pure, con \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} la forza elettrica e la forza magnetica, con c la velocità della luce nel vuoto e con $C = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ la velocità della luce nell'interno del dielettrico considerato. Con queste notazioni le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico, all'interno del dielettrico stesso, si scrivono

$$(1) \quad \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = c \operatorname{rot} \mathfrak{H} \quad , \quad \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathfrak{E} .$$

Sia, ora, σ una superficie fissa, chiusa e regolare compresa nel nostro campo, limitante una regione S di spazio, all'interno della quale \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} , come funzioni delle coordinate ξ, η, ζ di un punto variabile e del tempo t , sieno regolari e soddisfino alle equazioni (1), e sia n un vettore unitario normale a σ diretto verso l'interno di S . Se, allora, x, y, z sono le coordinate di un punto fisso, interno ad S , e poniamo

$$(2) \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} ,$$

potremo scrivere

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \int_{\sigma} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} = \\
 & = - \operatorname{rot} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) + \int_S \frac{dS}{r} \operatorname{rot}' \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) = \\
 & = - \operatorname{rot} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) - \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right), \\
 & \int_{\sigma} \left[\mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} = \\
 & = - \operatorname{rot} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) + \int_S \frac{dS}{r} \operatorname{rot}' \mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) = \\
 & = - \operatorname{rot} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right)
 \end{aligned}$$

nelle cui formole abbiamo messo in vista soltanto il valore dell'argomento t da cui dipendono \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} , e l'operazione rot' s'intende eseguita rispetto alle variabili ξ, η, ζ supponendo r costante. Tenendo conto, poi, delle relazioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\Delta^2 - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) = - 4\pi \mathfrak{E}(x, y, z, t), \\ & \operatorname{rot}^2 \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) = \\ & = - \Delta^2 \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \end{aligned} \right.$$

e delle formole analoghe pel vettore \mathfrak{H} , si deducono immediatamente, dalle (3), le formole richieste. Basta, infatti, una volta, eseguire sulla prima delle (3) l'operazione rot , sulla seconda l'operazione $\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t}$ e sottrarre, un'altra volta, invece, eseguire sulla prima l'operazione $\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t}$, sulla seconda l'operazione rot e sommare, per trovare, seguendo la via indicata, le due formole

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & 4\pi \mathfrak{E}(x, y, z, t) = \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} - \\ & - \operatorname{rot} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right), \\ & - 4\pi \mathfrak{H}(x, y, z, t) = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} + \\ & + \operatorname{rot} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) \wedge n \right] \frac{d\sigma}{r} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \int_S \frac{dS}{r} \mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right). \end{aligned} \right.$$

È quasi superfluo aggiungere che se le divergenze dei vettori \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} si suppongono nulle, gli ultimi termini dei secondi membri delle (5) si riducono a

$$\text{grad} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{E} \left(t - \frac{r}{C} \right) \times n \right] \frac{d\sigma}{r} \quad \text{e} \quad \text{grad} \int_{\sigma} \left[\mathfrak{H} \left(t - \frac{r}{C} \right) \times n \right] \frac{d\sigma}{r}.$$

2. Nella Nota II *Sulla integrazione delle equazioni di Maxwell* ⁽¹⁾ abbiamo ottenuto l'integrale delle (1) che ci è assicurato dal teorema della Kowalewski, sotto la forma

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E}(x, y, z, t) &= \mathfrak{E}_0(x, y, z) + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left\{ \frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathfrak{H}_0 \frac{dS}{r} - \text{rot} \int_S \mathfrak{E}_0 \frac{dS}{r} \right\}, \\ \mathfrak{H}(x, y, z, t) &= \mathfrak{H}_0(x, y, z) - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left\{ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathfrak{E}_0 \frac{dS}{r} + \text{rot} \int_S \mathfrak{H}_0 \frac{dS}{r} \right\} \end{aligned} \right.$$

in cui S è la regione di spazio compresa nella sfera di centro (x, y, z) e di raggio Ct ed $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{H}_0$ sono i valori assegnati ad \mathfrak{E} ed \mathfrak{H} per $t=0$. Vogliamo approfittare di questa Comunicazione per dare una dimostrazione semplice e diretta anche delle (6), dimostrazione che può considerarsi una verifica delle stesse formole. Ci fermeremo a considerare soltanto la prima delle (6) trattandosi di ripetere, per la seconda, cose analoghe. Notiamo, a questo scopo, che, dalle (1), discende

$$\left(\Delta^2 - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 0$$

e che, dalle (1) stesse, si ricava

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \right)_0 = \frac{c}{\varepsilon} \text{rot} \mathfrak{H}_0, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} \right)_0 = -C^2 \text{rot}^2 \mathfrak{E}_0;$$

per cui la formola di Poisson ci permette, subito, di scrivere

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \left\{ \frac{c}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} \left(t \int_{\omega} \mathfrak{H}_0 d\omega \right) - C^2 \text{rot} \left(t \int_{\omega} \mathfrak{E}_0 d\omega \right) \right\}$$

ω essendo la superficie sferica di raggio uno, mentre i valori di \mathfrak{E}_0 ed \mathfrak{H}_0 si intendono, naturalmente, presi nei punti corrispondenti della sfera di raggio Ct . Basta, ora, integrare la precedente equazione, rispetto a t , fra 0 e t per ottenere la prima delle (6).

(1) Questi Rendiconti, 1° sem. 1916, fasc. 9°.

Un procedimento analogo, convenientemente esteso, serve a determinare l'integrale delle equazioni di Maxwell che discende dal teorema citato della Kowalewski, anche quando, in queste equazioni, si debba tener conto di correnti di conduzione, o di correnti di convezione.

Nei mezzi cristallini uniassici un procedimento della natura precedente si può applicare, solo, alle componenti delle forze elettrica e magnetica secondo l'asse di isotropia. Però, determinate queste due quantità, l'integrazione delle equazioni si compie nel modo più agevole.

Matematica. — *Equazioni integrali singolari con nuclei analoghi a quelli di Evans.* Nota di GIULIO ANDREOLI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. In questa Nota tratteremo equazioni del tipo

$$(A) \quad \varphi(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y) \varphi(y) dy = f(x).$$

Porremo come condizione fondamentale che l'integrale

$$(B) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |n(\alpha x - \beta y)| dy$$

esista sempre, qualunque sia x .

Un'equazione analoga, in un caso particolarissimo, è stata già trattata dal Picard ⁽¹⁾.

Premettiamo il seguente lemma:

Se il nucleo n è tale che esista l'integrale

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y) dy,$$

questo integrale si riduce ad una costante.

Infatti, mutiamo x in $x + \xi$, con ξ arbitrario; l'integrale ora scritto diventa

$$\sigma(x + \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta y + \alpha \xi) dy.$$

Notiamo che β non può essere nullo, poichè allora la n non dipenderebbe dalla y , e l'integrale sarebbe infinito. Poniamo perciò

$$y = z - \frac{\alpha}{\beta} \xi \quad ; \quad dy = dz.$$

⁽¹⁾ T. Lalesco, *Introduction à la théorie des équations intégrales*, pag. 121 e seg.; ivi è citato e riportato l'esempio di E. Picard.

I limiti dell'integrale non cambiano; sarà dunque

$$\sigma(x + \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(\alpha x - \beta z) dz = \sigma(x),$$

da cui, ponendo $x = 0$, si trae

$$\sigma(\xi) = \sigma(0) = h.$$

Si vede che soddisfatta la condizione (B), è di conseguenza soddisfatta la condizione enunciata nel lemma.

2. Dimostriamo ora che, almeno in un certo intorno di $\lambda = 0$, la (A) ammette soluzione unica soddisfacente alla condizione

$$|\varphi(x)| < \Phi \quad (-\infty < x < +\infty)$$

se è anche

$$|f(x)| < F \quad (-\infty < x < +\infty);$$

e che inoltre, almeno in quell'intorno, tale soluzione è sviluppabile in serie di potenze rispetto a λ .

Consideriamo lo sviluppo

$$(1) \quad \theta(x) = f(x) - \lambda \int n(xs_1) f(s_1) ds + \\ + \lambda^2 \int ds_2 \int n(xs_2) n(s_2 s_1) f(s_1) ds_1 - \dots$$

dove per brevità si ponga

$$n(\alpha x - \beta y) = n(xy)$$

e si tralascino i limiti d'integrazione.

Supponiamo d'aver già dimostrato che

$$\left| \int n(xs_m) ds_m \int n(s_m s_{m-1}) ds_{m-1} \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| \leq k_m;$$

in conseguenza di quanto abbiamo già detto sarà:

$$\left| \int n(xy) dy \int n(ys_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| \leq \\ \leq \int |n(xy)| dy \left\{ \left| \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| \right\} \leq \int |n(xy)| k_m \cdot dy \leq k k_m;$$

ed essendo

$$\left| \int n(xs) f(s) ds \right| \leq \int |n(xs)| |f(s)| ds \leq F k,$$

pel principio d'induzione completa, avremo che

$$\left| \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| \leq F k^m.$$

Ne segue che lo sviluppo (1) ammette come maggiorante la serie

$$(2) \quad F \cdot \sum \lambda^m k^m;$$

e poichè questa converge assolutamente per

$$|\lambda k| < 1,$$

ne deduciamo che sotto tale condizione effettivamente la (1) rappresenta una serie che converge uniformemente nel campo $(-\infty, +\infty)$ rispetto alla x ; e che anzi

$$(3) \quad |\theta(x)| \leq \frac{F}{1 - |\lambda k|}.$$

Se invece di avere

$$|f(x)| < F$$

si avesse solo

$$(4) \quad \left| \int n(xs_r) ds_r \int \dots \int n(s_2 s_1) f(s_1) ds_1 \right| < F,$$

mentre gli integrali

$$\int n(xs_p) ds_p \int \dots \int n(s_2 s_1) f(s_1) ds_1 \quad (p < r)$$

esistono qualunque sia x , il ragionamento fatto vale ancora, come si vedrebbe trascurando i primi r termini della (1). Seguendo il ragionamento che faremo, si vedrebbe che esistono

$$\theta(x), \quad \int n(xs) \theta(s) ds, \dots,$$

ma che si può solo affermare che

$$\left| \int n(xs_r) ds_r \int \dots \int n(s_2 s_1) \theta(s_1) ds_1 \right| < \Theta \text{ (costante),}$$

e che in conseguenza resta invariata tutta la discussione.

3. Dimostriamo ora che per

$$|\lambda k| < 1,$$

la (1) rappresenta effettivamente la soluzione di A, e che tale soluzione è unica.

Poniamo

$$\theta(x) = \left\{ f(x) - \lambda \int n(xs) f(s) ds + \lambda^2 \int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) f(s) ds - \dots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right\} + R_m(x);$$

in conseguenza sarà:

$$\begin{aligned} \theta(x) + \lambda \int n(xz) \theta(z) dz = & \left\{ f(x) - \lambda \int n(xs) f(s) ds + \right. \\ & + \dots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \left. \right\} + R_m(x) + \\ & + \lambda \left\{ \int n(xz) f(z) dz - \lambda \int n(xz) dz \int n(xs) f(s) ds + \right. \\ & + \dots + (-\lambda)^{m+1} \int n(xz) dz \int n(zs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \left. \right\} + \\ & + \lambda \int n(xz) R_m(z) dz. \end{aligned}$$

Per le ipotesi fatte sulla convergenza degli integrali, il primo e terzo termine si possono sommare membro a membro; spariscono tutti i sommandi eccetto il primo del primo termine e l'ultimo del terzo. Resta dunque:

$$\begin{aligned} \theta(x) + \lambda \int n(xz) \theta(z) dz = \\ = f(x) + \lambda (-\lambda)^{m+1} \int dz \int \dots \int ds n(xz) n(zs_m) \dots n(s_1 s) f(s) ds + \\ + R_m(x) + \lambda \int n(xz) R_m(z) dz. \end{aligned}$$

Ma abbiamo già visto che la (1) ammette, per ogni valore di x , la (2) come maggiorante; ed essendo $|\lambda k| < 1$, ne viene in conseguenza che dato un ε piccolo a piacere, esisterà un indice μ tale che per $m > \mu$ sia sempre

$$|R_m(x)| < \varepsilon$$

$$|\lambda^{m+2}| \left| \int dz \int \dots \int ds n(xz) n(zs_m) \dots n(s_1 s) f(s) \right| < \varepsilon \quad \left| -\infty < x < +\infty \right.$$

Quindi sarà

$$\left| \int n(xz) R_m(z) dz \right| \leq \int |n(xz)| |R_m(z)| dz \leq \varepsilon \int |n(xz)| dz,$$

ove, pel lemma enunciato, l'ultima quantità scritta è eguale ad εk .

Ed avremo in conseguenza

$$\left| \theta(x) + \lambda \int n(xs) \theta(s) ds - f(x) \right| \leq \varepsilon + \varepsilon + |\lambda k| \varepsilon < 3\varepsilon.$$

con ε piccolo ad arbitrio.

Quindi sarà precisamente

$$\theta(x) + \lambda \int n(xs) \theta(s) ds - f(x) = 0$$

cioè $\theta(x)$ sarà soluzione della (A). Il ragionamento fatto sussiste invariato nelle conclusioni, e poco modificato nella forma, anche nell'ipotesi più generale fatta colla (4).

4. Resta da mostrare che imposta la condizione

$$|\varphi(x)| < \Phi,$$

[o quella più generale enunciata alla (4)], la soluzione è unica nel campo di validità dello sviluppo in serie.

Supposto infatti che esistano due soluzioni soddisfacenti a tale condizione, la loro differenza vi soddisferà ancora, e sarà soluzione dell'equazione omogenea

$$(5) \quad \omega(x) + \lambda \int n(xs) \omega(s) ds = 0 \quad |\lambda k| < 1.$$

Quindi, chiamato Ω il limite superiore di $|\omega(x)|$, sarà

$$|\omega(x)| = \left| \lambda \int n(xs) \omega(s) ds \right| \leq |\lambda| \int |n(xs)| |\omega(s)| ds \leq |\lambda k| \Omega.$$

D'altra parte, dalle (5) si trae successivamente

$$\begin{aligned} \int n(xs) \omega(s) ds &= \lambda \int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) \omega(s) ds \\ \int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) \omega(s) ds &= \lambda \int n(xs_2) ds_2 \int n(s_2 s_1) ds_1 \int n(s_1 s) \omega(s) ds. \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Le prime m di queste, moltiplicate rispettivamente per $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^m$ e sommate tutte con la (5), danno

$$\omega(x) = \lambda^{m+1} \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) \omega(s) ds$$

e quindi

$$|\omega(x)| \leq |\lambda|^{m+1} \int |n(xs_m)| ds_m \int \dots \int |n(s_1 s)| \cdot |\omega(s)| ds \leq |\lambda|^{m+1} k^{m+1} |\Omega|,$$

qualunque sia m . Ma $|\lambda k|^{m+1}$ tende a zero al crescere di m ; se quindi e

... $|\omega(x)| < \Omega$
sarà di conseguenza

$$\omega(x) = 0$$

salvo tutt'al più i punti d'un insieme di misura nulla.

Al posto dell'ultima condizione, si può porre la (4) ed il risultato non cambia.

Resta quindi dimostrato che per $|\lambda k| < 1$, la soluzione limitata della (A) è unica, se la $f(x)$ è limitata.

Epperò possiamo enunciare il

TEOREMA I. — *L'equazione*

$$\varphi(x) - \lambda \int n(\alpha x - \beta y) \varphi(y) dy = f(x)$$

ammette, in un certo intorno di $\lambda = 0$, una soluzione unica, sviluppabile in serie di potenze della λ , e tale che

$$|\varphi(x)| < \Phi, \quad |f(x)| < F \quad (-\infty < x < +\infty)$$

se esiste l'integrale

$$\int |n(\alpha x - \beta y)| dy = k;$$

ed il

TEOREMA II. — *L'equazione stessa ammette, in un intorno di $\lambda = 0$, una soluzione unica soddisfacente alla*

$$\left| \int n(x s_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| < \Phi$$

se

$$\left| \int n(x s_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds \right| < F$$

sempre che esista l'integrale

$$\int |n(\alpha x - \beta y)| dy.$$

5. Osserviamo poi che l'esistenza di

$$\int n(x s_1) ds_1 \int n(s_1 s) f(s) ds$$

unita a quella dell'integrale

$$\int |n(xs)| ds$$

implica che si abbia anche

$$\int n(xs_1) ds_1 \int n(s_1 s) f(s) ds = \int \left\{ \int n(xs_1) n(s_1 s) ds \right\} f(s) ds$$

$$\int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) f(s) ds = \int \left\{ \int n(xs_m) ds_m \int \dots \int n(s_1 s) ds_1 \right\} f(s) ds$$

Quindi, con uno sviluppo analogo allo sviluppo (1), si potrà addirittura costruire un nucleo risolvete, allorchè sia stato dimostrato che i nuclei iterati dedotti da un nucleo funzione d'una combinazione lineare di x ed y , se esistono, conservano la stessa forma; e che se il nucleo primitivo soddisfa alla condizione B, anche i nuclei iterati vi soddisfano.

Tali proprietà risulteranno in una prossima Nota, come conseguenza di una teoria della composizione di tali nuclei.

Notiamo che le considerazioni qui svolte si possono riattaccare ad un precedente lavoro (1).

Matematica. — *Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla statistica matematica.* Nota di F. P. CANTELLI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

1. Questo scritto fa seguito ad una mia precedente Nota (2); adopero, pertanto, gli stessi simboli di questa, premettendo ad essi un indice tutte le volte che occorra. Così, ad es., scriverò ${}_x M_n$ per indicare il valore medio di una variabile casuale X_n e ${}_y M_s$ per indicare l'analogo valore di un'altra variabile casuale Y_s .

Nella indicata Nota ho mostrato come una estensione di un teorema di Boole (3) si renda utile nella risoluzione di un interessante problema; qui mostrerò due altre diverse applicazioni del teorema stesso, tentando, così, di toglierlo dall'oblio nel quale è stato lasciato.

(1) G. Andreoli, *Su un problema di meccanica ereditaria*, Atti R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 50, 1915.

(2) *Sulla probabilità come limite della frequenza*. Questi Rendiconti, serie 5^a, vol. XXVI (1917).

(3) Il Boole, nel libro citato nella Nota precedente, dà il suo teorema sotto la forma

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_n} - (n-1).$$

Ponendo $p_{i_r} = 1 - p_{e_r}$, si può anche scrivere

$$p_{i_1 i_2 \dots i_n} \geq 1 - (p_{e_1} + p_{e_2} + \dots + p_{e_n}).$$

Quest'ultima si presta, come si è visto, alla estensione ad una infinità di eventi, contrariamente all'altra.

Ora, mentre sono note delle formole che permettono di calcolare confini inferiori convenienti della probabilità $P_{(s)}$, o valori sufficientemente approssimati di questa, non sono note, per quanto mi consta, formole generali analoghe relative alla probabilità $P_{(s, t, \dots, v)}$.

La prima delle applicazioni, delle quali qui mi occupo, serve a mostrare come il teorema di Boole sia adatto a colmare, almeno in parte, la lacuna ora accennata; e mi limiterò a indicare una formola, che dà spesso un confine inferiore conveniente di $P_{(s, t, \dots, v)}$, dedotta dalle formole analoghe relative alle probabilità $P_{(s)}$, $P_{(t)}$, ..., $P_{(v)}$.

Il confine inferiore, indicato, della probabilità $P_{(s, t, \dots, v)}$ conduce, sotto opportune condizioni, a dimostrare che si ha

$$(6) \quad \lim_{\substack{s \rightarrow x \\ t \rightarrow x \\ \vdots \\ v \rightarrow x}} P_{(s, \dots, v)} = 1,$$

e in ciò può vedersi una generalizzazione della *legge dei grandi numeri* la quale, come è noto, è espressa dalla relazione

$$(7) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} P_{(s)} = 1..$$

La formola appresso indicata, inoltre, conduce a risultati numericamente più espressivi di quelli ottenuti nella Nota precedente.

3. È da indicare, in primo luogo, un teorema che fornisca limiti superiori generalmente convenienti delle probabilità relative al *non verificarsi* di ciascuna delle ineguaglianze (2), *a prescindere* dalle altre. Queste probabilità corrispondono alle $p_{e_1}, p_{e_2}, \dots, p_{e_n}$ che entrano nella formola di Boole, mentre la probabilità relativa alla *coesistenza* delle (2) corrisponde alla p_{i_1, i_2, \dots, i_n} della formola stessa.

A confini superiori convenienti delle probabilità indicate, si perviene usufruendo dei valori medi delle variabili casuali simbolicamente rappresentate da alcune potenze di ${}_x M_{(s)} - X_{(s)}, \dots, {}_z M_{(v)} - Z_{(v)}$.

Le espressioni che si ottengono riescono però complicate, nelle applicazioni, quando si vada oltre la quarta potenza. È perciò che mi limito a considerare soltanto le potenze non superiori alla quarta, scartando, anche per semplicità, la terza potenza la quale, ordinariamente, non ha grande peso nei risultati.

Vale il seguente teorema, che mi limito ad enunciare:

Il confine superiore più conveniente della probabilità che non sia

$$(8) \quad -\lambda \sqrt{\sigma_2} \leq M - X \leq +\lambda \sqrt{\sigma_2}$$

Se, inoltre, è: C un confine superiore finito di $\alpha\sigma_{2,(s)}, \dots, \alpha\sigma_{2,(v)}$; α un confine inferiore di $\alpha\alpha_s, \dots, \alpha\alpha_v$; r un analogo confine dei numeri s, t, \dots, v , si può porre

$$(19) \quad L = 1 - \frac{2}{\alpha^2} \cdot \frac{C}{r}.$$

La (18), meno conveniente della (16), è tale che, pur sostituendo in essa il secondo membro della (19), conduce, quando si applichi al caso particolare in cui le variabili casuali $X_{(s)}, \dots, X_{(v)}$ coincidano con le variabili $X_{(s)} \cdot X_{(s+1)} \cdot \dots \cdot X_{(v)}$, di cui alla Nota precedente, e poi venga estesa al caso di una successione illimitata di variabili $X_{(s)}, X_{(s+1)}, \dots$, tenuto conto che la successione $M_{(s)}, M_{(s+1)}, \dots$ tenda ad un limite M , a risultati più espressivi di quelli corrispondenti indicati nella Nota stessa, purchè s sia sufficientemente elevato. Ma su ciò non mi intrattengo oltre.

6. L'altra applicazione del teorema di Boole, della quale mi occupo, riguarda la *teoria del rischio* nelle assicurazioni ⁽⁵⁾. Evito, per semplicità, il linguaggio e i particolari inerenti alla tecnica assicurativa.

Si immagini un Istituto il quale, al tempo t , abbia assunto degli impegni verso un numero N di assicurati, dai quali ricava in compenso certe somme. Si ammetta che siano rappresentabili per mezzo di una variabile casuale $X_{(0,r)}$ le perdite, positive o negative (guadagni), che può subire l'Istituto stesso, nell'intervallo $(t, t+r)$, a seconda dei diversi raggruppamenti cui possono dar luogo le eliminazioni degli N individui dall'Istituto considerato.

Mi pongo, per semplicità, nel caso in cui sia, per qualunque valore intero di r , $E[X_{(0,r)}] = 0$ e considero

$$(20) \quad E[X_{(0,r)}]^2 = M_r.$$

Sarà $M_r = 0$ per ogni $r \geq \omega$, se è nulla la probabilità che, dopo l'epoca $t + \omega$, qualcuno degli N individui considerati non si sia eliminato dall'Istituto.

Siccome un confine inferiore della probabilità P_1 che sia

$$(21) \quad -\infty < X_{(0,\omega)} \leq \lambda \sqrt{M_\omega}$$

è espresso ⁽⁶⁾ da $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$, si può dire che l'Istituto resta garantito, al

⁽⁵⁾ Cfr. H. Poterin du Motel, *Technique de l'assurance sur la vie* (d'après l'article allemand de G. Bohlmann) [Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, tome I. vol. IV, fasc. IV (1911), pp. 575-590]. U. Broggi, *Matematica attuariale* [Hoepli, Milano (1906), pp. 307-344].

⁽⁶⁾ loc. cit. ⁽⁴⁾.

tempo t , con una probabilità superiore a $\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$ che, *alla fine del periodo* $(t, t + \omega)$, la perdita non superi la somma $\lambda \sqrt{M_\omega}$.

Confini inferiori più elevati di P_1 possono ottenersi tenendo conto dei valori medi delle potenze superiori alla seconda di $X_{(0, \omega)}$; si ottengono espressioni, anche limitandosi alla quarta potenza, che generalmente conducono, nel caso studiato, a calcoli lunghi sì che, almeno per ora, sono da scartare. Se, però, il numero N degli individui considerati è sufficientemente grande vale ordinariamente, per le perdite, con buona approssimazione, la legge di probabilità gaussiana degli errori e si può scrivere

$$(22) \quad P_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

7. Si può ricercare, *invece*, la probabilità P_2 che la perdita dell'Istituto non superi la somma $\lambda \sqrt{M_\omega}$ alla fine di *tutti* i periodi $(t, t + r)$, $r = 1, 2, \dots, \omega$.

L'applicazione del teorema di Boole permette di asserire, quando valga, per le perdite, la legge di probabilità sopra indicata, in ogni periodo $(t, t + r)$, e quando si ponga

$$(23) \quad m_r = \frac{M_\omega}{M_r},$$

che un confine inferiore di P_2 , ossia della probabilità della *coesistenza* delle ineguaglianze

$$(24) \quad -\infty < X_{(0,1)} \leq \lambda \sqrt{M_\omega}, \dots, -\infty < X_{(0,\omega)} \leq \lambda \sqrt{M_\omega},$$

è dato da

$$(25) \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{r=1}^{r=\omega} \int_{\lambda \sqrt{\frac{m_r}{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

8. Si ha normalmente $M_1 < M_2 < \dots < M_\omega$ e se si ha pure, ad es., $\omega \leq 100$, la (25) permette di scrivere

$$(26) \quad P_2 > 1 - \frac{100}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Se si vuole che sia $P_2 = P_1$, il valore λ_1 di λ , cui si riferisce P_2 , non potrà essere inferiore al valore di λ cui si riferisce P_1 . Assegnato P_1 , le

(22), (26) permettono di dedurre immediatamente che un valore l , più elevato di λ_1 , si ha dall'equazione

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_l^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{100 \cdot \sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{\sqrt{2}}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Risulta, per i valori di λ che più interessano:

$$\lambda = 3, l = 4,19 \dots; \quad \lambda = 4, l = 4,97 \dots$$

La questione, sopra indicata, inerente alla teoria del rischio, richiede ulteriori considerazioni quando si connetta col normale svolgimento degli affari di un Istituto di assicurazioni.

Correzioni alla Nota precedente: Al denominatore della seconda delle formole (15) togliere il fattore $\frac{1}{2}$; al denominatore del 2° membro della (25) sostituire 2^{s-1} a 2^s ; a pag. 45 sostituire 10.000.000.000 a 1.000.000.000.

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative.* Nota di E. DANIELE, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Risulta dalle ricerche del prof. Volterra sulle operazioni di composizione e sulle funzioni permutabili che ad ogni problema algebrico o differenziale, — la cui soluzione si ottenga con funzioni che siano, nell'intorno dell'origine, olomorfe, oppure presentino un punto di diramazione od un polo, oppure una singolarità logaritmica. — corrisponde, secondo una determinata regola, un problema integrale o integro-differenziale che si risolve con funzioni olomorfe in tutto il piano oppure dotate, tutt'al più, delle singolarità dianzi accennate. Queste ricerche hanno la loro base nel noto volume *Leçons sur les fonctions de lignes*, chap. IX-XIII, e trovano il loro completamento nella recente Memoria *Teoria delle potenze, dei logaritmi e delle funzioni di composizione* (Mem. d. R. Acc. d. Lincei. ser. 5^a, vol. XI. fasc. 4^o. 1916), dove sono definite, almeno per la composizione di 1^a specie, le potenze di composizione ad esponente qualunque, nonchè i logaritmi di composizione.

Consideriamo per semplicità un'equazione differenziale ordinaria:

$$(A) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

L'equazione integro-differenziale ad essa correlativa si ottiene nel modo seguente: scriviamo hx in luogo di x , e $\frac{y}{k}$ in luogo di y , essendo h e k due parametri indipendenti da x ; la (A) diventa

$$F\left(hx, \frac{y}{k}, \frac{y'}{hk}, \dots, \frac{y^{(n)}}{hk^n}\right) = 0,$$

ossia, riducendo a forma intera col moltiplicare per convenienti potenze di h e di k :

$$\Phi(x|h, k, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0;$$

dopo ciò sostituiamo ad h e k due funzioni $\varphi(\lambda\mu)$ e $\psi(\lambda\mu)$ delle due nuove variabili λ e μ , permutabili fra di loro, e interpretiamo i prodotti e le potenze di $\varphi, \psi, y, y', \dots, y^{(n)}$ come delle composizioni. L'ultima equazione si muta così in un'equazione integro-differenziale, cioè (per limitarci alla composizione di 1^a specie):

$$(B) \quad \Phi(x, \ddot{\varphi}, \ddot{\psi}, \ddot{y}, \ddot{y}', \dots, \ddot{y}^{(n)}) = 0,$$

e se la (A) ammette una soluzione

$$\ddot{y} = f(x)$$

il cui comportamento nell'intorno dell'origine sia quello indicato dianzi, se ne deduce per la (B) la soluzione

$$y(x|\lambda, \mu) = \ddot{\psi} f(x \ddot{\varphi}),$$

la quale si costruirà, qualora $f(x)$ non sia olomorfa, mediante funzioni di λ e μ non più di *ordine* intero e positivo.

2. Vi sono però delle equazioni differenziali che apparentemente sfuggono al principio generale di dare luogo, attraverso alla regola di Volterra, ad un'equazione integro-differenziale correlativa. Tale è, per esempio, l'equazione

$$(a) \quad xy' + y = 0.$$

Se difatti scriviamo hx in luogo di x , e $\frac{y}{k}$ in luogo di y , sparisce, dopo averla moltiplicata per k , ogni traccia dei parametri h e k .

Anche fra le equazioni a derivate parziali si trovano facilmente analoghi esempi. Così l'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{a}{v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{b}{u} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

con a e b costanti, non si altera quando si sostituisca $h_1 u$ ad u , $h_2 v$ a v ,
o $\frac{\theta}{k}$ a θ .

Limitandoci alle equazioni differenziali ordinarie (l'estensione alle equazioni alle derivate parziali non presenta difficoltà) cominceremo col caratterizzare la forma che spetta al primo membro della (A) nell'ipotesi che l'equazione manchi, come accade per la (a), di equazione integro-differenziale correlativa. Vedremo poi successivamente come questo difetto non sia, per così dire, che apparente, potendosi dare, con una trasformazione semplicissima, alle equazioni in discorso una forma tale da farle rientrare nella regola generale.

3. La più generale equazione differenziale ordinaria di ordine n si può scrivere nel modo seguente:

$$(1) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) \equiv \sum C(x) y^i (y')^{i_1} (y'')^{i_2} \dots (y^{(n)})^{i_n} = 0,$$

dove i, i_1, \dots, i_n sono dei numeri interi, positivi o nulli, e $C(x)$ è una funzione qualunque di x . Facciamo la sostituzione

$$(2) \quad x = h\xi, \quad y = \frac{\eta}{k};$$

il termine generale della (1) diventa:

$$\Gamma(\xi) \frac{\eta^i (\eta')^{i_1} (\eta'')^{i_2} \dots (\eta^{(n)})^{i_n}}{h^p k^q},$$

avendo posto:

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi) &= C(h\xi) \\ p &= i + 2i_1 + \dots + ni_n \\ q &= i + i_1 + i_2 + \dots + i_n, \end{aligned}$$

e rappresentando con η', η'', \dots derivate rispetto a ξ .

Con ciò ogni termine di F riceve intanto un fattore

$$\frac{1}{h^p k^q},$$

diverso, naturalmente, da termine a termine.

Scriviamo ora la (1) in modo che in un suo termine si abbia $C(x) = 1$; dividiamo cioè tutta l'equazione per uno qualunque dei coefficienti C , e indichiamo con P e Q i valori di p e q in quel termine in cui $C = 1$. In virtù della sostituzione (2) questo termine si altera esattamente pel fattore

$$\frac{1}{h^p k^q}.$$

Partiamo ora dall'ipotesi che questa sostituzione debba lasciare invariata la (1). Ciò significa che in seguito alla sostituzione (2) il primo membro della (1), ossia F , potrà risultare moltiplicato tutt'al più per un fattore indipendente da $\eta', \dots, \eta^{(n)}$. Questo fattore dovrà comparire nei singoli termini di F , e provverà, per ciascun termine, in parte dal fattore $C(x)$ ed in parte dall'altro fattore

$$Y = y^i (y')^{i_1} \dots (y^{(n)})^{i_n}.$$

Ma poichè vi è un termine, quello in cui p e q hanno i valori P e Q , che viene moltiplicato precisamente per $\frac{1}{h^p k^q}$, tutti i rimanenti termini di F dovranno ricevere questo moltiplicatore; e poichè la parte Y si moltiplica per $\frac{1}{h^p k^q}$, così la parte residua $C(x)$ deve ricevere un fattore del medesimo tipo. Osservando infine che C è indipendente da y , ne risulta che dev'essere:

$$C(x) = \frac{c}{x^j},$$

dove c indica una costante qualunque, mentre j è un numero intero legato a p dalla relazione

$$(3) \quad p + j = P.$$

Quanto a q è chiaro che dovrà avere il medesimo valore in tutti i termini, cioè: $q = Q$.

L'equazione (1) prende dunque la forma

$$(4) \quad \sum \frac{c}{x^j} y^i (y')^{i_1} \dots (y^{(n)})^{i_n} = 0:$$

il suo primo membro è un polinomio omogeneo in $y, y', \dots, y^{(n)}$, e l'esponente j di $\frac{1}{x}$ si potrà sempre supporre positivo o nullo, e quindi per la (3) P indicherà il massimo valore di p . I coefficienti c non vanno soggetti ad alcuna restrizione.

4. Vogliasi p. es. costruire le equazioni del tipo (4) del 1° ordine. Dovremo porre $i_2 = \dots = i_n = 0$, e la (4) si riduce alla seguente:

$$(5) \quad x^n y'^n + c_1 x^{n-1} y y'^{n-1} + \dots + c_{n-1} x y^{n-1} y' + c_n y^n = 0;$$

essa si scinde in n (od in un numero minore) di equazioni lineari

$$xy' = \gamma y, \quad (\gamma \text{ costante}).$$

i cui integrali sono

$$(6) \quad y = \beta x^\gamma, \quad (\beta \text{ cost. arbitraria}).$$

Un secondo esempio notevole ci viene fornito dalle equazioni lineari d'ordine n , che assumono la forma:

$$(7) \quad x^n y^{(n)} + c_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_{n-1} x y' + c_n y = 0.$$

È l'equazione di Cauchy, alla quale si soddisfa ponendo

$$(8) \quad y = x^\alpha,$$

e ricavando α dall'equazione (fondamentale)

$$\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) + c_1 \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2) + \dots + c_{n-1} \alpha + c_n = 0.$$

Se questa ha le radici tutte distinte, la (7) ammette n integrali distinti della forma (8); se invece ha r radici eguali ad α , accanto all'integrale (8) avremo gli altri

$$(8') \quad x^\alpha \lg x, x^\alpha \lg^2 x, \dots, x^\alpha \lg^{r-1} x.$$

Tanto la (6) quanto le (8) e (8'), che forniscono rispettivamente gli integrali della (5) e della (7), contengono delle funzioni alle quali corrispondono, nella teoria della composizione, delle funzioni o delle operazioni aventi un significato preciso: queste nuove espressioni non si saprebbero tuttavia considerare come soluzioni di equazioni integro-differenziali correlative alle equazioni differenziali (5) e (7).

5. Trasformiamo la (4) col porre: $x = e^{\xi}$. Poichè la (4) è omogenea rispetto ad $y, y', \dots, y^{(n)}$, e pel modo come contiene x , il primo membro si riduce al prodotto di $e^{-p\xi}$ per un polinomio omogeneo in $y, y', \dots, y^{(n)}$ a coefficienti costanti, rappresentando con $y' y'' \dots$ derivate rispetto a ξ . Indicando allora con

$$\Phi(y y' \dots y^{(n)})$$

un tale polinomio, l'equazione trasformata si scrive:

$$(9) \quad \Phi(y y' \dots y^{(n)}) = 0.$$

Ora questa equazione si trova nelle condizioni volute per dare luogo, attraverso alla regola di Volterra, all'equazione integro-differenziale correlativa. Difatti la sostituzione (2) la muta in un'equazione del medesimo tipo, dalla quale si staccherà per conseguenza il fattore $\frac{1}{k^2}$ (e quindi non rimarrà

traccia del parametro k , non essenziale del resto), mentre in ogni termine comparirà come fattore una certa potenza di h , diversa generalmente da termine a termine.

In conclusione, all'equazione (4) si può associare un'equazione integro-differenziale correlativa, purchè si eseguisca su x e y , invece della sostituzione (2), l'altra:

$$(10) \quad x = e^{h\xi} \quad , \quad y = \eta .$$

Nell'equazione trasformata, il cui primo membro sarà un polinomio omogeneo in $\eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$ a coefficienti costanti, i vari termini conterranno h a potenze differenti (che si potranno sempre supporre ad esponente positivo o nullo); non resta che porre in luogo di h una qualunque funzione ψ di due variabili λ e μ , e interpretare i prodotti e le potenze di $\psi, \eta, \eta', \dots, \eta^{(n)}$ come composizioni.

6. Applicando questo procedimento all'equazione differenziale (7), la sostituzione (10) la trasforma nell'equazione a coefficienti costanti $\gamma_1 \gamma_2 \dots$:

$$(11) \quad y^{(n)} + \gamma_1 h y^{(n-1)} + \dots + \gamma_{n-1} h^{n-1} y' + \gamma_n h^n y = 0 ,$$

da cui si deduce l'equazione integro-differenziale

$$(12) \quad y^{(n)} + \gamma_1 \dot{\psi}(\lambda\mu) \ddot{y}^{(n-1)}(\xi|\lambda\mu) + \dots \\ + \gamma_{n-1} \ddot{\psi}^{n-1}(\lambda\mu) \ddot{y}'(\xi|\lambda\mu) + \gamma_n \ddot{\psi}^n(\lambda\mu) \ddot{y}(\xi|\lambda\mu) = 0 .$$

Agli integrali della (7) del tipo

$$(13) \quad y = x^\alpha$$

oppure

$$(13') \quad y = x^\alpha \lg^r x$$

corrispondono gli integrali della (11)

$$y = e^{h\alpha\xi} \quad , \quad y = h^r \xi^r e^{h\alpha\xi} ,$$

e quindi le soluzioni della (12):

$$y(\xi|\lambda\mu) = 1 + \alpha \xi \psi(\lambda\mu) + \frac{1}{2!} \alpha^2 \xi^2 \dot{\psi}^2(\lambda\mu) + \dots \\ y(\quad) = \xi^r \dot{\psi}^r(\lambda\mu) + \alpha \xi^{r+1} \dot{\psi}^{r+1} + \frac{1}{2!} \alpha^2 \xi^{r+2} \dot{\psi}^{r+2} + \dots$$

Questi sviluppi sono convergenti in tutto il piano, e rappresentano funzioni di λ e μ permutabili con ψ : s'intende che per il primo sviluppo, che non è nullo per $\xi=0$, la composizione dovrà essere definita nel senso specificato a pag. 138 delle *Leçons sur les fonctions de lignes*.

È da segnalare il fatto che, partendo dall'equazione differenziale (7) e da un suo integrale (13) o (13'), in generale non olomorfo, si perviene, attraverso alla sostituzione (10), ad un'equazione integro-differenziale correlativa, le cui soluzioni corrispondenti a quegli integrali sono sempre olomorfe in tutto il piano.

7. Passando in generale all'equazione differenziale (4), notiamo in primo luogo ch'essa ammette sempre, al pari della (7), degli integrali della forma (13), e sotto certe condizioni, cui debbono soddisfare i suoi coefficienti, ammette pure degli integrali della forma (13'). Consideriamo più generalmente quegli integrali che presentano, intorno all'origine, lo sviluppo

$$(14) \quad y = x^\alpha \lg^r x (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots),$$

dove α indichi un numero qualunque ed r un intero positivo o nullo. La sostituzione

$$x = e^{h\xi}$$

trasforma la (4) in un'equazione

$$\Phi(y y' \dots y^{(n)} | h) = 0$$

in cui la ξ non figura esplicitamente, e per la quale lo sviluppo (14) diventa :

$$(15) \quad y = h^r \xi^r e^{h\alpha\xi} (a_0 + a_1 e^{h\xi} + a_2 e^{2h\xi} + \dots).$$

Ora la serie

$$a_0 + a_1 x + \dots$$

è convergente in un certo cerchio col centro nell'origine; ne segue che la serie

$$(16) \quad a_0 + a_1 e^{h\xi} + a_2 e^{2h\xi} + \dots$$

sarà convergente in tutto un campo infinito limitato da una retta parallela all'asse delle ordinate ed estendentesi nel senso delle ascisse negative.

La (15) dà quindi, col sostituire agli esponenziali i loro sviluppi in serie di potenze e ad h una funzione $\psi(\lambda\mu)$, e interpretando al solito le potenze di ψ come composizioni, una serie convergente in tutto il piano, soluzione dell'equazione integro-differenziale che possiamo ora chiamare correlativa della (4). Si potrà sempre dire che questa soluzione è permutabile con la funzione $\psi(\lambda\mu)$: soltanto bisognerà osservare, quando $r=0$, che se il campo di convergenza della serie (16) non comprende il punto $\xi=0$, allora si dovrà assumere la composizione nel senso più ampio come già si specificò nel caso particolare esaminato al n. 6.

Storia della Matematica. — *Sur les nombres infinis de Fontenelle*. Nota del prof. BRANISLAV PETRONIEVICS, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Le premier essai d'une théorie rationnelle des nombres infinis a été fait par B. Fontenelle dans ses *Éléments de la Géométrie de l'Infini* ⁽¹⁾. Que cette théorie soit pleine de contradictions, la critique l'a bientôt relevé ⁽²⁾. Mais qu'elle possède une valeur historique incontestable, comparée avec les deux théories modernes des nombres infinis, celle de M. Cantor et celle de M. Veronese, c'est ce que je me propose de montrer dans cette Note.

Comme on le sait, les deux théories modernes ont des points de départ tout à fait différents. Tandis que la théorie de Cantor procède arithmétiquement en partant des nombres finis et en définissant ω , le premier nombre infini, comme nombre de tous les nombres finis ⁽³⁾, celle de Veronese procède géométriquement, en définissant le nombre infini de premier ordre ∞ comme nombre de segments égaux à l'unité (AB) d'un segment de droite infini (AA^∞) , qui peut être divisé en un nombre fini de parties infinies ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ Fontenelle B., *Éléments de la Géométrie de l'Infini*, Paris, MDCCXXVII.

⁽²⁾ Mac Laurin, *Treatise on the Theory of Fluxions*, Introduction, trad. franç., MDCCXLIX, t. I, p. XLI-XLVI. — Card. G. S. Gerdil, *Opere edite ed inedite*, Roma, MDCCCVI, t. IV, p. 261-286 (« Essai d'une démonstration mathématique contre l'existence éternelle de la matière et du mouvement, déduite de l'impossibilité démontrée d'une suite actuellement infinie de termes, soit permanens, soit successifs »; cet essai a été imprimé pour la première fois à Paris 1760; la critique de Fontenelle y est contenue dans § 1 et 2, p. 263-276). — Achard F., *Reflexions sur l'infini mathématique*, dans Mémoires de l'Académie royale, Berlin 1745, p. 143-154 (cité par Veronese, *Fondamenti di Geometria*, p. 620).

⁽³⁾ Cantor distingue parmi les nombres transfinis deux sortes de nombres: nombres ordinaux et nombres cardinaux, en définissant les premiers comme types d'ordre des ensembles bien ordonnés et les seconds comme résultats de double abstraction de la qualité et de l'ordre des éléments dans les ensembles (comp. G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Mathematische Annalen, Bd. 46, p. 481 et Bd. 49, p. 216). Tandis que à chaque nombre ordinal fini correspond un nombre cardinal fini, il y a une infinité de nombres transfinis ordinaux, appartenant tous à la même classe, qui correspondent au même nombre cardinal transfini (l. c., Bd. 49, p. 220).

⁽⁴⁾ Comp. G. Veronese, *Fondamenti di Geometria*, Padova. 1891 Ip. III et IV, p. 84, 92 et Def. II, § 86, p. 97. — M. Veronese, pour introduire ses nombres infinis et infinis petits, part de la définition du système linéaire homogène, tel que étant donné un de ses éléments quelconques il existe dans le système deux segments égaux à un segment donné quelconque, qui ont respectivement le second et le premier extrême dans l'élément

Veronese veut établir, qu'il ny a aucun point de la ligne droite infinie, qui puisse correspondre au nombre ω de Cantor, c'est à dire que, selon lui, l'application géométrique des nombres transfinis de Cantor n'est pas possible ⁽¹⁾. Mais la différence la plus essentielle des deux théories, c'est le critère de l'égalité des ensembles infinis, en tant que ces ensembles forment la base des nombres infinis, leurs types d'ordre.

D'après Cantor, ce critère consiste dans la correspondance univoque (ou biunivoque) des nombres de deux ensembles, tandis que, d'après Veronese, c'est la possession d'éléments qualitativement égaux qui, outre la correspondance, détermine l'égalité de deux ensembles infinis ⁽²⁾.

La théorie de Fontenelle a le même point de départ que celle de Cantor. — Pour mieux concevoir l'Infini, je considère la suite naturelle des nombres, dont l'origine est 0 ou 1. Chaque terme croit toujours d'une unité, & je vois que cette augmentation est sans fin, & que quelque grand que soit le nombre où je serai arrivé, je n'en suis pas plus proche de la fin de la suite, ce qui est un caractère qui ne peut convenir à une suite dont le nombre des termes serait fini. Donc la Suite naturelle a un nombre de termes infini (Fontenelle, op. c., p. 29) ⁽³⁾. Mais tandis que d'après Cantor

donné; sans qu'il subsiste entre deux segments quelconques a et b du système l'axiome d'Archimède, c'est à dire l'axiome que si $a < b$ il y a un nombre entier fini n tel que $a \cdot n > b$.

⁽¹⁾ Comp. Veronese, op. c., § 90, p. 102-106.

⁽²⁾ D'après Cantor deux ensembles sont « semblables » (ähnlich), quand on peut établir une correspondance univoque de leurs éléments d'après leur ordre (l. c. Bd. 46, p. 497 s.). « Égaux ou équivalents » (äquivalent) sont des ensembles, quand on peut établir une correspondance univoque de leurs éléments (ib., p. 482).

Quand on veut établir l'égalité de deux ensembles infinis, il ne suffit pas, d'après Veronese, qu'il y ait une correspondance univoque entre leurs éléments, il faut qu'il y ait en outre identité qualitative de ces éléments. Veronese attribue aux éléments des ensembles trois propriétés différentes: 1. la position, 2. la qualité et 3. l'ordre (op. c., Def. I. § 38, p. 15). La qualité des éléments servant de base à la différence entre le tout et la partie (Def. II. § 27, p. 9), le nombre ordinal est défini alors par Veronese comme type d'ordre d'un ensemble ordonné, où l'on a fait uniquement abstraction de la position des éléments, la relation de partie et du tout et la relation de l'ordre étant conservées (op. c., Def. II, § 45, p. 26). Fait-on abstraction de la relation de partie et du tout, on a le nombre ordinal de Cantor, et si l'on va enfin jusqu'à faire abstraction aussi de l'ordre, on parvient au nombre cardinal de Cantor. Veronese ne conteste donc point la valeur logique des nombres de Cantor, il les tient seulement pour des notions purement arithmétiques incapables d'être appliqués à la ligne droite (comp. aussi son article *Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali*, Math. Annalen, Bd. 47, p. 426 f.).

⁽³⁾ Que Fontenelle ait clairement conçu le nombre ω , cela est confirmé encore mieux par les mots suivants, qui, dans son texte, viennent immédiatement après les mots cités dans le nôtre:

« En vain dirait-on que le nombre des termes qui la compose est toujours actuellement

le nombre ω se trouve hors de la suite naturelle des nombres finis ⁽¹⁾, le nombre infini de tous les nombres finis se trouve d'après Fontenelle dans cette suite même comme son dernier terme ⁽²⁾. Tandis que d'après Cantor $1 + \omega = \omega$, mais $\omega + 1 > \omega$, on a en général d'après Fontenelle, qui ne distingue pas ces deux cas, $\infty + a = \infty$, mais $\infty + \infty = 2\infty$ ⁽³⁾. Tandis que d'après Cantor il y a deux principes de formation des nombres transfinis, il n'en existe chez Fontenelle qu'un seul, le principe des séries des nombres infinis correspondant à la suite naturelle de nombres finis ⁽⁴⁾.

fini, mais que je le puis toujours augmenter. Il est bien vrai que le nombre des termes que je puis actuellement parcourir ou arranger selon leur ordre, est toujours fini, mais le nombre des termes dont la suite est composée en elle-même, est autre chose. Les termes dont elle est composée en elle-même existent tous également, et si je la conçois poussée seulement jusqu'à 100, je ne donne pas à ces 100 termes une existence dont soient privés tous ceux qui sont par de-là. Donc tous les termes de la suite, quoique-qu'ils ne puissent pas être embrassés ou considérés ensemble par mon esprit, sont également réels. Or le nombre en est infini, comme on vient de le prouver, donc un nombre infini existe aussi réellement que les nombres finis » (op. c., § 84, p. 29 et s.).

Veronese reconnaît aussi Fontenelle pour un des précurseurs de l'idée du nombre ω ; mais il trouve que Gerdil, un de critiques de Fontenelle (comp. remarque 2), l'aurait conçu mieux que Fontenelle (Veronese, op. c., p. 629). Cependant si l'on compare le texte de Gerdil cité par Veronese (p. 629 s.) avec le texte de Fontenelle, ici communiqué in extenso, on ne peut pas partager cette opinion.

(1) D'après Cantor le nombre ω est un nombre limite (= eine Grenzzahl), qui n'est précédé par aucun nombre plus petit (l. c., Bd. 49, p. 226 et 231; comp. aussi son article *Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten*, dans *Zeitschrift für Philosophie*, vol. 91, p. 84).

(2) « Dans la suite naturelle chaque terme est égal au nombre des termes qui sont depuis 1 jusqu'à lui inclusivement. Donc puisque le nombre de tous ses termes est infini, elle a un dernier terme qui est ce même infini.

« On l'exprime par ce caractère ∞ .

« Il ne faut point que le mot de *dernier terme* effraye en cette matière. C'est un dernier terme fini que la suite naturelle n'a point, mais n'en avoir point de dernier fini, ou en avoir un dernier infini, c'est la même chose » (Fontenelle, op. c., p. 30).

(3) « ∞ ne peut plus être augmenté par les grandeurs qui l'avaient augmenté jusque-là, car il a reçu d'elles tout ce qu'il pouvait recevoir d'augmentation. Et si on n'augmente pas ∞ , il ne le diminue pas non plus quand il en est retranché. Donc $\infty \pm a = \infty$ » (Fontenelle, op. c., pag. 31).

« — ∞ , qui est 1 devenu infini par une augmentation sans fin, ou une grandeur fini qui est sortie de l'ordre du fini, & a passé dans celui de l'infini, ne peut plus être augmenté par tout ce qui est de l'ordre du fini dont elle n'est plus, mais seulement par ce qui est de l'ordre de l'infini, dont elle a commencé d'être » (ib., p. 32).

(4) Comp. Cantor, l. c., Bd. 49, p. 228, 221 et 226. Le premier principe de production des nombres transfinis consiste dans l'addition de 1 à un nombre précédant, et le deuxième dans la position d'un nouveau nombre (nombre limite) d'après la formule $\alpha = \text{Lim. } \alpha_n$, les nombres α_n représentant une « série fondamentale » (Fundamentreihe) et la série fondamentale étant une série de type ω (l. c., Bd. 46, p. 508).

Le principe de production des nombres infinis est exprimé par Fontenelle dans des termes suivants.

« Il suit & de tout ce qui a été dit, & de la nature de la chose, que ∞ étant gran-

Comme on le voit, autant par son point de départ que par la manière d'après laquelle sont deduits les nombres infinis supérieurs, la théorie de Fontenelle se rapproche sensiblement de celle de M. Cantor. Mais les ressemblances avec la théorie de M. Veronese ne sont pas moins grandes. En mettant le nombre ω dans la série des nombres naturels comme son dernier terme, Fontenelle admet la divisibilité de son nombre ∞ en parties égaux, c'est à dire les nombres infinis de la forme $\frac{\infty}{n}$ ⁽¹⁾, comme Veronese admet de tels nombres d'après la définition même de son nombre ∞ . Mais tandis que Veronese admet, d'après son principe d'égalité des ensembles infinis, des nombres de la forme $\infty - n$ et $\infty + n$. Fontenelle, comme nous l'avons déjà vu, n'admet point de tels nombres. La différence est encore plus grande quant à la production des nombres infinis des ordres supérieurs. Tandis que d'après Fontenelle, comme nous l'avons vu, ces nombres sont produits d'après un principe analogue au deuxième principe de Cantor. Veronese deduit ces nombres en appliquant le principe, qui lui permet d'obtenir son nombre infini de premier ordre, un nombre fini (les infinis d'ordre fini), ou un nombre infini de fois (les infinis d'ordre infini) ⁽²⁾.

Mais les deux théories ont de commun, par opposition à celle de Cantor ⁽³⁾, la supposition de nombres infiniment petits, quoique la manière de déduire ces nombres soit bien différente chez eux deux. Fontenelle en déduit la nécessité, en partant de la suite des fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc. qui

deur, est susceptible d'augmentation, pourvu que les grandeurs que l'on concevra l'augmenter soient grandeurs par rapport à lui, c'est à dire infinies. Ainsi l'on peut concevoir cette nouvelle suite $\infty, 2\infty, 3\infty, \&c$ qui sera une progression arithmétique, dont la différence sera ∞ , & comme la différence de 1 à ∞ ou $\infty - 1$ est $= \infty$, cette progression pourra commencer par 1, & on aura $\div 1\infty, 2\infty, 3\infty, \&c$.

« Puisque dans cette nouvelle progression les coefficients de ∞ croissent toujours selon la suite des nombres naturelles, elle se terminera enfin par $\infty \times \infty = \infty^2$ » (op. c., p. 33).

En élevant la progression 1, $\infty, \infty^2, \infty^3, \dots \infty^\infty$ au carré, cube, etc. ∞ , on arrive d'après Fontenelle (p. 40) à la progression: $1^\infty, \infty^\infty, \infty^{2\infty}, \infty^{3\infty}, \dots \infty^{\infty^2}$, et en appliquant le même procédé à cette progression, à la progression dont le dernier terme sera ∞^{∞^3} .

« Il est visible, que ces élévations n'ont point du fin, qu'on irait jusqu'à une progression dont le dernier terme serait ∞^{∞^∞} , & que là même on recommencerait encore à faire des élévations sans fin » (op. c., p. 40).

⁽¹⁾ La divisibilité de ∞ par n , nombre fini, est déduite par Fontenelle de la propriété générale d'une grandeur d'être divisible. (Comp. op. c., § 93, p. 32 et § 133, p. 41).

⁽²⁾ Veronese, op. c., Def. II, § 86, p. 97 et hyp. V, p. 106.

⁽³⁾ Cantor s'est déclaré expressément contre la possibilité des nombres infiniment petits. Comp. son article cité dans Zeitschrift für Philosophie, vol. 91, p. 112 s.

doit d'après lui se terminer par un $\frac{1}{\infty}$, l'infiniment petit de premier ordre ⁽¹⁾. Les infiniments petits des ordres supérieurs se déduisent par divisions successives de $\frac{1}{\infty}$ par ∞ , de $\frac{1}{\infty^2}$ par ∞ etc. ⁽²⁾. Veronese y arrive en supposant que, un segment fini pouvant devenir indéfiniment petit, il y aura un point hors du champ de cette variabilité de telle sorte, que ce point-limite delimitera avec le point initial un segment infiniment petit, par rapport auquel le segment donné fini sera un infini de premier ordre ⁽³⁾. De la même manière, on peut supposer un infiniment petit de second ordre dans l'infiniment petit de premier ordre, et ainsi de suite ⁽⁴⁾.

Mais le point de ressemblance le plus important entre les deux théories se trouve dans la complète applicabilité, reconnues par eux, de nombres infiniment grands et infiniment petits à la ligne droite ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ « 1 étant pris pour représenter en général la grandeur finie, plus le nombre par lequel je le divise est grand, plus je le diminue, de sorte que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c sont des grandeurs toujours décroissantes. Donc à la fin $\frac{1}{\infty}$ sera une grandeur infiniment petite, ou, ce qui est la même chose, une partie *infinitième* du Fini, comme 1 est une partie infinitième de ∞ » (Fontenelle, op. c., p. 116).

Que cette déduction de l'infinimeat petit soit tout à fait erronée, on peut l'entrevoir aisément. Le nombre ω est posé par la réalisation de tous les nombres finis, parce qu'il représente le type d'ordre de cet ensemble. Mais le nombre $\frac{1}{\omega}$ n'est point posé par la réalisation de tous les fractions finies $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ..., $\frac{1}{n}$, ..., $\frac{1}{\omega}$ ne se trouvant par définition parmi les membres de cette série, et n'étant point posé immédiatement par sa réalisation, comme l'est le nombre ω par la réalisation de la série $1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Cantor a donc eut raison de n'admettre pas d'infiniment petits dans sa théorie; et la déduction de l'infiniment petit par Veronese est la seule qu'on puisse regarder comme rationnelle (et formellement admissible).

⁽²⁾ « Donc $\frac{1}{\infty}$ peut être encore infiniment divisé, ce qui donnera $\frac{1}{\infty^2}$, partie infinitième de $\frac{1}{\infty}$...; et comme cela n'a point de fin, on aura $1 \cdot \frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty^2} \cdot \frac{1}{\infty^3} \cdot \frac{1}{\infty^4} \cdot \dots$ &c $\frac{1}{\infty^\infty}$, c'est-à-dire, autant d'ordres de Infiniments petits qui s'abaisseront au dessous de 1, que l'on a vu d'ordres d'Infinis qui s'élevaient à l'infini au dessus de 1 » (Fontenelle, op. c., p. 117).

⁽³⁾ Comp. Veronese, op. c., Ip. VI, p. 128, prop. a § 96, p. 129, prop. d § 97, p. 131.

⁽⁴⁾ Veronese, op. c., Ip. VII, p. 147 et prop. e, § 100, p. 148.

Mr. Levi-Civita, qui a faite une exposition purement analytique des nombres infinis et infiniments petits de Mr. Veronese (Atti R. Istituto Veneto, 1892: *Infiniti e Infinite-simi attuali*) en confirmant ainsi la validité mathématique de la théorie, a donnée une importante extension de cette théorie par l'introduction des infinis et infiniment petits d'ordres rationnels quelconques.

⁽⁵⁾ Fontenelle, op. c., p. 245: « Il n'y a point de nombre qui ne puisse exprimer

A cette comparaison des trois théories de nombres infinis, je veux ajouter encore quelques remarques critiques touchant la valeur de la théorie de Fontenelle.

Comme nous l'avons vu, le nombre ∞ de Fontenelle veut être et le type d'ordre d'ensemble arithmétique des nombres finis sans dernier terme et le type d'ordre des segments finis égaux d'une ligne droite infinie avec un point à l'infini, c'est qui est contradictoire.

Mais nous ne devons pas nous étonner de cette confusion des points de vue arithmétique et géométrique dans la conception principale de la théorie de Fontenelle: cette théorie appartient à l'âge d'élaboration du calcul infinitésimal, qui dans son développement initial s'inspirait aussi bien de motifs arithmétiques que de motifs géométriques.

C'est par cette confusion de motifs arithmétiques et géométriques qu'on peut expliquer aussi les autres contradictions, qui se trouvent dans la théorie de Fontenelle. La contradiction formelle du nombre ∞ , dernier terme de la suite naturelle des nombres, a pour conséquence immédiate une autre contradiction: si ∞ est le dernier terme de la suite naturelle des nombres, il devrait être précédé immédiatement par un nombre fini. Fontenelle s'aperçoit de cette contradiction, mais il cherche à l'éviter en supposant, que ∞ est divisible par n , n étant un nombre fini quelconque (op. c., p. 59). Mais en poursuivant la recherche des propriétés de la suite A (par A Fontenelle désigne la suite des nombres naturels avec son dernier terme ∞), Fontenelle tombe dans la même contradiction, qu'il a voulu et su éviter. En comparant les deux suites:

$$1, 2, 3, 4, \dots, \infty$$

$$1, 4, 9, 16, \dots, \infty^2,$$

la deuxième représentant l'élévation au carré de la première, et en les représentant par des lignes droites supposées infinies, Fontenelle, sans motiver

quelque Ligne droite, et réciproquement la Ligne droite qui ne puisse être exprimée par quelque nombre... Donc à tous les nombres infiniment grands ou petits répondant des lignes possibles infiniment grands ou petits ».

Chez Veronese l'applicabilité des nombres infinis et infinitésimaux résulte immédiatement de l'origine même de ces nombres (comp. op. c., prefazione, p. XXV-XXVI).

Cantor s'est occupé très peu de la question de cette applicabilité. Nous trouvons seulement un passage dans ses *Series*, où il touche cette question, en attribuant à la ligne droite un point à l'infini correspondant à son nombre ω (comp. son article cité dans *Zeitschrift für Philosophie*, vol. 91, p. 193 s.). Sur l'impossibilité formelle de cette application géométrique des nombres cantorien comp. mon opuscule *Die typischen Geometrien und das Unendliche*, Heidelberg, 1907, p. 31-48.

suffisamment la nécessité d'un tel passage, admet un passage immédiat du Fini à l'Infini dans les deux séries, et, ce passage étant plus proche du commencement dans la deuxième série, il admet aussi l'étrange thèse d'un nombre fini devenant infini par l'élévation au carré. La gravité de cette conséquence, qui manifeste une contradiction éclatante, est reconnue par Fontenelle même, mais il s'efforce de l'atténuer en distinguant les nombres finis indéterminables des nombres finis fixes, qui appartiennent au commencement de la suite naturelle ⁽¹⁾. Il dit aussi que « le paradoxe admis ne conduit jamais à aucune conclusion fausse » (p. 66). Mais une théorie, qui peut admettre de pareilles contradictions comme principes de déductions logiques, ne mérite, même si elle appartient à la Mathématique de l'Infini, d'être poursuivie dans ses détails, son paradoxe suprême étant sa sentence de mort.

Reste sa valeur historique. Comme on le voit par ce qui précède, la théorie de Fontenelle peut être regardée comme la souche commune des deux théories divergentes de Cantor et de Veronese, et il serait intéressant de savoir, si et dans quelle mesure les deux créateurs des nouvelles théories se sont inspirés, au moins négativement, de l'ancienne. Ce qui est hors de doute, c'est qu'elle a été connue par tous les deux, car ils la citent, en repoussant également ses conséquences. En critiquant la théorie de son rival et en rapprochant par trop la théorie de celui-ci de la théorie de Fontenelle, Cantor s'exprime, d'après sa manière un peu violente, en disant que les nombres de Veronese possèdent une similitude frappante (auffallende Aehnlichkeit) « mit den höchst absurden 'unendlichen Zahlen' Fontenelle's in dessen *Géométrie de l'Infini* » ⁽²⁾. En répondant à la critique injuste de Cantor, Veronese se défend de la similitude imputée de ses nombres avec ceux de Fontenelle, qu'il rejette également ⁽³⁾. Mais il n'est pas impossible

(1) « J'avoue que du premier coup d'oeil cette difficulté est accablante, et elle m'aurait fait abandonner tout ce Système de l'Infini, si je n'avais vu un grand nombre de fortes raisons qui la diminuoient... » (Fontenelle, op. c., p. 64).

Parmi ces raisons la plus importante est celle de la différence entre les finis fixes et les finis indéterminables, qui est établie par Fontenelle de la manière suivante. « Il y a bien de la différence entre le Fini *fixe*, pour ainsi dire, & le Fini *en mouvement*, ou, comme disent nos habiles Voisins, *en fluxion*, pour devenir Infini » (op. c., p. 65).

« J'appelle *Finis indéterminables* les termes finis de A qui deviennent infinis dans A' par l'élévation au carré... » (op. c., p. 67).

(2) Comp. Cantor, l. c., Bd. 46, p. 501.

(3) « Egli (Cantor) afferma la 'Uebereinstimmung' dei miei infiniti e infinitesimi cogli 'höchst absurden' numeri infiniti di Fontenelle. Io conosco perfettamente questi infiniti e le censure che li hanno distrutti, ed è per ciò che nell'appendice del libro mi limitai ad accennare a quelle critiche ed a dichiarare che la teoria di Fontenelle non è da confondersi colla mia » (comp. G. Veronese, *Mathematische Annalen*, Bd. 47, p. 424 s. et son livre *Fondamenti di Geometria*, Appendice, p. 620. trad. allemande, p. 698).

de supposer, vu les similitudes subsistantes, que Cantor comme Veronese soient parvenus à établir les principes de leurs théories en cherchant d'éviter les contradictions flagrantes dans lesquelles était tombée la théorie du célèbre académicien français.

Meccanica celeste. — *Sopra le distanze dei pianeti dal Sole.*
Nota di G. ARMELLINI, presentata dal Corrisp. R. MARCOLONGO.

1. Mi permetto di partecipare all'Accademia alcune semplici considerazioni sopra le distanze planetarie.

2. Prescindendo da considerazioni teoriche che, nello stato attuale delle nostre cognizioni cosmogoniche, la scienza è obbligata a riguardare con qualche diffidenza, è noto che le leggi empiriche, le quali ci rappresentano le distanze dei pianeti dal Sole, possono tutte ridursi alla formola:

$$x_n = a + bc^n.$$

3. Così nella celebre legge di Bode o di Titius⁽¹⁾ si pone $a = 0,4$; $b = 0,3$; $c = 2$. Per Mercurio abbiamo $n = -\infty$; per Venere $n = 0$ (vale a dire supponiamo implicitamente l'esistenza d'infiniti pianetini tra Mercurio e Venere), per la Terra $n = 1$ ecc., ottenendo in tal modo i seguenti valori:

Mercurio.	0,4	Marte	1,6	Saturno . . . ,	10,0
Venere	0,7	Asteroidi . . .	2,8	Urano	19,6
Terra	1,0	Giove	5,2	Nettuno . . .	38,8

Le vere distanze sono invece:

Mercurio . .	0,387	Marte	1,52	Urano	19,2
Venere . . .	0,723	Giove	5,20	Nettuno . . .	30,1
Terra	1,00	Saturno	9,54		

Questo specchietto mostra, come del resto è notissimo, che la legge di Bode è assolutamente falsa per Nettuno dove l'errore è del 30 %⁽²⁾.

(¹) Il vero inventore della legge è Titius (G. D. Tietz). Il Wurm cercò di perfezionarla prendendo

$$a = 0,397 \quad , \quad b = 0,301 \quad , \quad c = 2 ;$$

ma, mentre in tal modo si altera la bella semplicità della legge, l'errore per Nettuno è ancora *aumentato* ($d = 38,92$). Ciò spiega perchè la modificazione del Wurm non abbia attecchito.

(²) Non si dica che Urano e Nettuno appartengono alla così detta « *zona retrograda* ». Noi ora ci proponiamo di rappresentare *empiricamente* le distanze degli otto pianeti principali, prescindendo da ogni teoria cosmogonica; su ognuna delle quali, del resto, sussistono ancora moltissimi dubbi.

4. Più tardi L. Gaussin cercò una legge valida anche per Nettuno prendendo ⁽¹⁾:

$$a = 0 \quad b = \frac{1}{214,45} \quad c = 1,7226$$

Egli pone $n = 8$ per Mercurio (cioè ammette 7 pianeti intramercuriali). $n = 9$ per Venere e così di seguito, ottenendo in tal modo le distanze seguenti:

Mercurio . .	0,362	Marte . . .	1,848	Saturno . .	9,445
Venere . . .	0,623	Asteroidi . .	3,183	Urano . . .	16,269
Terra	1,073	Giove	5,483	Nettuno . .	28,025

La rappresentazione di Nettuno è migliorata in confronto di quella data dalla legge di Bode; ma per Urano, ed anche un po' per Giove e Marte, è peggiorata assai.

5. E. Belot ⁽²⁾ immaginando il sistema planetario nato dall'urto di due nebulose e servendosi di considerazioni matematiche, su cui ora non insistiamo, prende:

$$a = 0,28 \quad b = \frac{1}{214,45} \quad c = 1,883$$

Nella sua ipotesi Mercurio corrisponderebbe ad $n = 5$; Venere ad $n = 7$

⁽¹⁾ A differenza di Bode, Gaussin (e, dopo di lui, Belot) prende come unità di lunghezza il semidiametro solare invece della distanza media dalla Terra al Sole. Il numero $b = \frac{1}{214,45}$ nelle leggi di Gaussin e Belot esprime appunto il rapporto tra le due lunghezze. Non riusciamo però a comprendere quale relazione possa esistere tra il raggio attuale del Sole e le distanze dei pianeti. La Nota di Gaussin è intitolata: *Lois concernant la distribution des astres du système solaire*, C. R. 1880 I. pag. 518.

Il Gaussin ha dato anche la legge

$$x_n = 1,336 + 1,6425^n$$

per rappresentare i satelliti di Giove; però dopo la pubblicazione della sua Nota (1880) sono stati scoperti altri cinque satelliti. Istituito il confronto, si ha il seguente specchietto:

Satellite	Distanza osservata	Distanza calcolata	Errore
V	2,53	2,19	13,4 %
VI	160,46	116,23	27,5 "
VII	164,46	190,9	16,1 "
VIII	329,3	313,5	4,8 "
IX	?	512,73	?

La mancanza di spazio c'impedisce di fare analoghe osservazioni per i satelliti degli altri pianeti.

⁽²⁾ *Sur la loi de Bode et les inclinaisons des eq. planétaires etc.*, C. R. 1905, II, pag. 937.

(cioè egli ammette 4 pianeti intramercuriali, ed un pianeta fra Mercurio e Venere); la Terra ad $n = 8$ ecc., ottenendo così le seguenti distanze:

Mercurio . . 0,390	Marte . . . 1.668	Saturno . . 9,546
Venere . . . 0,671	Asteroidi . . 2,893	Urano . . . 17,728
Terra 1,017	Giove 5,201	Nettuno . . 33,133

6. Ora io ho osservato che, *se invece di ammettere un gran numero di pianeti tra il Sole e Mercurio o tra Mercurio e Venere, si ammette un solo posto vacante tra Saturno ed Urano, diviene possibile di rappresentare le distanze planetarie con legge semplicissima e con notevolissima esattezza.*

7. È noto infatti che la distanza di Marte dal Sole è compresa tra 1,52 ed 1,53. Prendendola per eccesso avremo il numero 1,53. Ora io dico che la distanza di ogni pianeta dal Sole è data dalla formola:

$$x_n = \overline{1,53}^n;$$

dove si ha $n = -2$ per Mercurio, $n = -1$ per Venere, $n = 0$ per la Terra, $n = 1$ per Marte ecc.

Si ha infatti, eseguendo i calcoli:

Mercurio . . . 0,427 = $\overline{1,53}^{-2}$	Giove 5,48 = $\overline{1,53}^4$
Venere 0,654 = $\overline{1,53}^{-1}$	Saturno 8,38 = $\overline{1,53}^5$
Terra 1,00 = $\overline{1,53}^0$
Marte 1,53 = $\overline{1,53}^1$	Urano 19,46 = $\overline{1,53}^7$
Asteroidi . . . $\left\{ \begin{array}{l} 2,24 = \overline{1,53}^2 \\ 3,58 = \overline{1,53}^3 \end{array} \right.$	Nettuno 29,76 = $\overline{1,53}^8$

8. Possiamo paragonare tra loro le quattro leggi, calcolando l'errore medio, cioè la radice quadrata della media aritmetica dei quadrati degli errori. Eseguendo i calcoli per gli otto grandi pianeti, abbiamo la seguente tabella:

Bode	errore medio = 3,083
Gaussin	" " = 1,37
Belot	" " = 1,18
Armellini	" " = 0,473

Tenendo presente la nota relazione che unisce l'errore medio alla misura di precisione abbiamo ancora:

Bode	misura di precisione =	0,230
Gaussin	" "	= 0,517
Belot	" "	= 0,601
Armellini. . . .	" "	= 1,499

Occorre inoltre osservare che la mia legge è la più semplice e non contiene alcun elemento estraneo (come il raggio solare nelle leggi di Gaussin e Belot) giacchè l'unico parametro che vi comparisce è il rapporto tra la distanza di Marte e quella della Terra. Il numero dei posti vacanti nella mia legge è il minimo. Infatti nella legge di Bode esso è infinito, in quella di Gaussin è uguale a 7, in quella di Belot a 5, e nella mia ad 1. Sarà inutile far notare che i due valori 2,34 e 3.58 che si ottengono per gli asteroidi, sono compresi nei limiti della zona asteroidica ed anzi sono sufficientemente vicini ai limiti stessi.

9. Benchè, come già dicevo, la scienza sia costretta a riguardare con una certa diffidenza ogni tentativo di applicazione delle matematiche alle ricerche cosmogoniche, pure non sarà inutile aggiungere alcune considerazioni supplementari. Osserviamo dunque che:

a) Nelle quattro leggi comparisce sempre una progressione geometrica, sola o unita con altri termini. Ciò sembrerebbe dar ragione alle teorie del Poincarè ⁽¹⁾ il quale interpretava la legge di Bode ammettendo che i pianeti siano stati prodotti ad intervalli di tempo presso a poco costanti.

b) La nostra legge tenderebbe invece a indebolire alcune delle considerazioni teoriche da cui parte il Belot ⁽²⁾. Nel nostro caso si ha infatti $a = 0$. Ammettendo quindi l'origine vorticale del Belot, il raggio della nebulosa vorticale primitiva sarebbe stato trascurabile. Di più, secondo la teoria del Belot, il rapporto $\varrho = c : M^{1/3}$ (M = massa solare) dovrebbe essere poco differente dall'unità. Ed egli lo trova, infatti, eguale a 1,039. Nel nostro caso, invece, essendo $c = 1,53$, si avrebbe $\varrho = 0,84$.

c) Nulla può dirsi riguardo ai pianetini intramercuriali e a quelli supposti tra Mercurio e Venere. Gaussin suppone 7 pianetini intramercuriali; E. Belot, 4 intramercuriali ed 1 fra Mercurio e Venere; Bode infiniti pianetini fra Mercurio e Venere; noi non ne supponiamo nessuno. Come si vede, vi è pieno disaccordo tra le quattro leggi.

⁽¹⁾ Poincarè. *Hypothèses cosmogoniques*.

⁽²⁾ E. Belot, *Précisions nouvelles sur la loi exponentielle des distances des planètes et satellites*, C. R. 1916, II, pag. 564.

Non crediamo quindi di poter sottoscrivere alla teoria dello Charlier ⁽¹⁾ il quale, fondandosi sulla sola legge di Bode, ammette tra Mercurio e Venere uno sciame di pianetini che suppone concentrato presso i centri di librazione, ai vertici del triangolo Lagrangiano.

d) Ancor meno può dirsi del posto vacante tra Saturno ed Urano. Può trattarsi di una pura coincidenza aritmetica, ma può anche ammettersi che ciò dipenda da un periodo di stasi dell'attività centrale. Infatti, secondo la teoria già citata del Poincaré, una maggior distanza tra i pianeti corrisponderebbe ad un maggior intervallo di tempo tra la loro produzione. Potrebbe anche mettersi in relazione questo ristagno dell'attività centrale con la produzione dei due pianeti giganti Giove e Saturno, od anche col passaggio dalla zona a rotazione diretta alla zona retrograda.

Nè sarebbe assurdo supporre l'esistenza di qualche pianetino tra Saturno ed Urano, ammettendo così che la zona dei due grandi pianeti, Giove e Saturno, sia contornata tanto all'interno (tra Giove e Marte) quanto all'esterno (tra Saturno ed Urano) da uno sciame di pianetini. La grande distanza ci avrebbe fino ad ora impedito di scoprire il secondo sciame. Per persuadercene supponiamo per es. che il pianetino Cerere venisse trasportato nel posto vacante indicato dalla nostra legge, cioè alla distanza 12,72. La sua lontananza dal Sole essendo aumentata nel rapporto 4,6, essa riceverebbe una quantità di luce $4,6^{-2} = 21,16$ volte minore. Nell'opposizione la sua distanza dalla Terra sarebbe aumentata nel rapporto 6,6; quindi la quantità di luce che essa c'invierebbe sarebbe uguale ad $\frac{1}{21,16 \times 6,6^2}$ od $\frac{1}{921,72}$ della

quantità che ora ci manda. Tenendo presente il rapporto fotometrico tra le grandezze stellari ⁽²⁾ risulterebbe che in tale ipotesi Cerere, quando è all'opposizione, cioè nelle migliori condizioni, brillerebbe come un astro di 15^a grandezza! Essa sarebbe quindi probabilmente sfuggita alle nostre ricerche. E si pensi che, nella maggior parte, i pianetini sono assai minori di Cerere!

10. Termineremo con un'osservazione, non fatta ancora da alcuno, sulla teoria del Belot.

Nella Nota citata ⁽³⁾ il Belot, supponendo, come ho detto, che sia avve-

⁽¹⁾ L. Charlier, *Das Bodesche Gesetz und die sogenannten intramercuriellen Planeten*, Astr. Nachr., Bd. 193, n. 4623. Sullo stesso argomento si consulti pure un bel-l'articolo del prof. V. Cerulli, *La legge di Bode e il preteso pianeta intramercuriale*, nella « Rivista di Astronomia e scienze affini », anno VII (1913).

⁽²⁾ Chiamando con q il rapporto fotometrico tra due grandezze stellari consecutive, si ha, come è notissimo: $\log q = 0,4$; $q = 2,512$.

⁽³⁾ C. R. 1905, II. Non citiamo altre Note recentissime del Belot in C. R. non avendo attinenza con l'argomento.

nuto un urto tra una nebulosa verticale e una non verticale arriva all'equazione

$$(1) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{V}{\varphi} \frac{1}{x - a}.$$

dove V e φ sono due funzioni su cui ora non insistiamo.

Egli integra ponendo

$$(2) \quad \frac{V}{\varphi} = \text{costante}$$

senza dare alcuna spiegazione della limitazione (2) e supponendo quindi implicitamente che ciò sia avvenuto per puro caso: cosa certo molto improbabile.

Ne segue quindi che, supposta vera la *causa* (cioè l'urto tra le due nebulose), la probabilità p affinchè si sia verificato l'*effetto* (cioè affinchè le distanze del sistema planetario risultante obbediscano ad una legge esponenziale) è certo estremamente piccola.

Ora noi vediamo che l'*effetto* si è verificato e vogliamo cercare la probabilità X affinchè esso sia dovuto alla causa assegnata dal Belot.

Chiamando perciò con ω la probabilità *a priori* di un urto tra una nebulosa vorticale con una non vorticale, la teoria delle probabilità di cause ci dà la nota formola del Bayes ⁽¹⁾

$$(3) \quad X = \frac{p\omega}{\sum p_i \omega_i},$$

dove la sommatoria al denominatore va estesa a tutte le ipotesi analoghe (p. es. teoria di Laplace, teoria delle catture del See ecc.).

Noi non possiamo calcolare il secondo membro della (3) ignorando i fattori ω e p , ma possiamo con ragione affermare quanto segue:

La posizione (2) fatta dal Belot, introducendo al numeratore della (3) un fattore p estremamente piccolo, indebolisce in modo notevolissimo la probabilità della sua ipotesi.

⁽¹⁾ V. Bertrand, *Calcul de probabilités*, pag. 145; Poincaré, *Calcul de probabilités*, pag. 135.

Astronomia. — *Per una verifica sperimentale della teoria di relatività di Einstein.* Nota di GIOVANNI ZAPPA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

È noto che una delle conseguenze che Einstein ha tratto dalla sua teoria generale della *relatività*, ed anche da ipotesi più limitate, è l'azione che subisce un raggio luminoso in un campo gravitazionale. Precisamente, se un raggio luminoso traversa un campo in cui valga il potenziale di gravitazione $\frac{K^2 M}{r}$, esso subisce una deviazione totale di

$$\alpha = \frac{4K^2 M}{c^2 r}$$

dove K è la costante di gravitazione e c è la velocità della luce ed r sarà la minima distanza del raggio luminoso dalla massa M .

Se si usano le unità astronomiche, si ha

$$K = 0,01720$$

$$c = 172.8,$$

e indicando con β l'angolo sotteso da r per un osservatore situato sulla terra e A la distanza dalla terra della massa M , per β' piccolo, espresso in primi, si ha in secondi:

$$\alpha'' = \frac{M}{\beta' A} \times 28,10.$$

Il senso della deviazione è quello di aumentare β .

Einstein stesso ha richiamato l'attenzione degli astronomi sulla convenienza di tentare la verifica sperimentale del fenomeno misurando la deviazione di posizioni stellari in vicinanza del sole, durante gli eclissi totali.

Il raggio del sole è di 16' alla distanza 1, quindi una stella al bordo solare deve subire, secondo Einstein, una deviazione di 1".76. a 4' dal bordo di 1".4, a 10' di 1".1, a 16' di 0".9, a 32' di 0".6 e così via.

Se si considerano le distanze di due stelle equidistanti dal sole e collocate l'una da una parte, l'altra dall'altra di esso, allineate col centro, si hanno numeri doppî dei precedenti. In generale la distanza di due stelle, la cui congiungente passi a d minuti primi dal centro del sole, sarà modificata di

$$\alpha'' = 28.10 \left(\frac{\sqrt{\beta_1^2 - d^2}}{\beta_1^2} + \frac{\sqrt{\beta_2^2 - d^2}}{\beta_2^2} \right)$$

dove β_1 e β_2 sono le distanze dal centro del sole delle due stelle sempre

in minuti primi e vale il segno \div se le stelle sono situate da parti opposte della normale dal centro del sole alla loro congiungente, il segno $-$ in caso contrario.

Il dott. Freundlich ⁽¹⁾ e il prof. Curtis ⁽²⁾ esaminarono subito le lastre, fino allora ottenute, da varie spedizioni fotografando le regioni intorno al sole durante eclissi totali, ma non ne trovarono nessuna che potesse dare le posizioni delle stelle con la precisione sufficiente. Si trattava di fotografie ottenute con uno scopo diverso, quello della ricerca del pianeta intramercoriale; tra l'altro esse presentavano le immagini stellari allungate, perchè il moto della macchina era stato regolato sul moto del sole.

Gli stessi astronomi si accinsero ad eseguire fotografie adatte durante l'eclisse del 1914 in Russia; ma l'uno, tedesco, fu impedito di impiantare i suoi strumenti per lo scoppio della guerra; l'altro, americano, li impiantò, ma tra essi ed il sole vide interpersi al buon momento le nubi.

Oggi, dopo sei anni dal primo richiamo di Einstein, non si ha ancora la risposta dell'esperienza. Non si tratta di cosa di poco momento. Ottenute che si abbiano le fotografie adatte, si dovrà discutere un complesso di fenomeni che possono alterare le posizioni delle stelle in quelle condizioni, come rifrazione dovuta alla corona solare, anomalie di rifrazione della nostra atmosfera per la quale l'eclissarsi del sole è una causa di perturbazione, ecc. ecc. Già il prof. Courvoisier ⁽³⁾ ha trovato deviazioni sistematiche nella posizione degli astri osservati non lontani dal sole: Così per osservazioni di Venere a 6° dal sole di circa $0''.5$, a 11° di circa $0''.2$, di stelle lucenti a circa 25° dal sole di circa $0''.2$ sempre nella distanza dal sole, che appare aumentata. Si tratta, è vero, di osservazioni visuali, eseguite in condizioni del tutto diverse; ma, prescindendo da qualunque spiegazione, qualche cosa di analogo è da aspettare anche nelle posizioni fotografiche di stelle tanto più vicine al sole, sia pure eclissato.

Nell'intento di giungere più rapidamente a raccogliere il materiale necessario per verificare l'esistenza dell'effetto di Einstein, A. F. e F. A. Lindemann ⁽⁴⁾ hanno proposto di recente di fotografare i dintorni del sole fuori dell'eclisse; ma se essi soggiungono cose interessanti per chi voglia ottenere immagini fotografiche delle stelle durante il giorno, non mostrano davvero la possibilità di poter riuscire in una impresa così difficile come quella che essi propongono. Noi riportiamo nel quadro seguente le stelle non più deboli di 4^m che hanno una massima vicinanza al sole inferiore o di poco superiore ai due gradi. Per ciascuna diamo la misura appunto della minima distanza dal centro del sole e quindi il valore massimo per esse dell'effetto di Einstein,

⁽¹⁾ *Astronomische Nachrichten*, vol. 193, pag. 369.

⁽²⁾ *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, vol. 35, pag. 77.

⁽³⁾ *Beobachtungs-Ergebnisse der K. Sternwarte zu Berlin*, n. 15.

⁽⁴⁾ *Monthly Notices of the R. A. S.*, vol. 77, pag. 140.

poi l'indice del colore, desunto dallo spettro, di cui riportiamo il tipo, secondo le misure di King e Schwarzschild, ma posto uguale a zero l'indice relativo al tipo A0 (King) ed infine la grandezza stellare. Vi aggiungiamo la grandezza delle stelle più lucenti di 6^m.6 che possono capitare su una lastra quadrata di due gradi di lato con una delle suddette in centro e la loro distanza da queste.

STELLA PRINCIPALE						COMPAGNE	
Nome	Gr.	Sp.	I. C.	Dist sol.	Eff. Ein.	Gr.	Dist. princ.
ϱ Geminorum . . .	^M _{3.2} ^M _{4.2}	Ma	+ 1.9	54'	0".5	^M _{6.5}	46'
μ Geminorum . . .	3.2	Ma	+ 1.9	50'	0".6	nessuna	
δ Geminorum . . .	3.5	F0	+ 0.3	11'	max	6.5	76'
α Leonis	1.3	B8	— 0.1	29'	1".0	nessuna	
ϱ Leonis	3.8	B0 p	— 0.3	10'	max	5.9	51'
β Virginis	3.8	F8	+ 0.6	45'	0".6	nessuna	
η Virginis	4.0	A0	0.0	90'	0".3	6.1	19'
α Virginis	1.2	B2	— 0.3	133'	0".2	nessuna	
α Librae	2.9	A2	0.0	21'	1".3	5.5	4'
δ Scorpii	2.5	B1 p	— 0.3	121'	0".2	nessuna	
β Scorpii	2.9	B1	— 0.3	62'	0".4	5.5	0'.2

Si apprende così che una sola stella più lucente di 2^m.9 si avvicina al sole tanto da dare un effetto di Einstein non piccolo, ma che essa non ha nessuna stella di luminosità non inferiore alle 6^m.5 nei limiti di distanza suddetti. Si apprende che solo sei stelle hanno una compagna ed una sola negli stessi limiti e sempre più debole della 5^m.0. Certamente anche con cannocchiali a lungo fuoco, come di necessità occorrono, si possono usare lastre alquanto maggiori di quelle con 2 gradi di lato; ma comunque, anche quando si avesse un successo impensato nelle fotografie, mancherebbero sempre gli elementi indispensabili per una riduzione delle misure. In nessun modo possono soccorrere i metodi di riferimento proposti dai Lindemann e nemmeno si può sperare che riferendo la stella vicina al sole, ad una di eguale altezza a circa 180° d'azimut con un telescopio zenitale, si abbia una posizione scevra da errori dell'ordine del secondo d'arco, pur supposto che ci si possa metter nelle condizioni di vedere o fotografare almeno Regolo ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ I risultati di un tentativo di tale osservazione sarebbero pur sempre istruttivi, quando si prendessero le necessarie cure e ci si mettesse in condizioni eccezionalmente buone.

Ma fortunatamente vi è un'altra circostanza in cui si può tentare di mettere in luce l'effetto di Einstein con qualche probabilità di successo.

Applichiamo la formola data in principio a Giove; e lo possiamo fare perchè per Giove, più ancora che per il sole, è soddisfatta la condizione che sia $\frac{2K^2 M}{c^2}$ piccolo rispetto ad r . (Difatti $\frac{2K^2 M}{c^2}$ vale per il sole 3 Km. e per Giove 3 m., mentre r è per il sole 10^5 Km. e per Giove 10^4 Km.). Allora tenendo conto che per Giove $M = 10^{-3} \mathcal{A}\beta' = 10^{-1}$, il doppio dell'effetto di Einstein, cioè l'alterazione nella distanza di due stelle presso il lembo di Giove. allineate col suo centro e simmetriche rispetto ad esso, è di

$$0''.035$$

che, quando si considerino stelle a circa un decimo del diametro dal lembo, cioè $4'' \dots 5''$ quando Giove è in opposizione, diviene quasi esattamente

$$0''.03.$$

Così se noi fotografiamo una stella che sia per essere occultata da Giove con occultazione centrale o quasi centrale (diciamo più esattamente, con una minima distanza, dal centro del pianeta: inferiore alla metà del raggio). quando è a $4''$ o $5''$ dal disco, prima e dopo del fenomeno su una stessa lastra, spostata di una grandezza arbitraria d , intorno ai 5 mm. che sarà rivelata esattamente dallo spostamento di tutte le stelle che vi compaiono, dovremo trovare le due immagini, se esiste l'effetto di Einstein, distanti di

$$d + 0''.03.$$

A un decimo del diametro di Giove dal suo lembo è certamente nulla la rifrazione dell'atmosfera del pianeta.

Ci troviamo dunque di fronte a misure che offrono la stessa difficoltà di quelle per determinare la parallasse della maggior parte delle stelle prese in considerazione per tale determinazione, con la differenza che per noi si tratta di comparare due posizioni prese con l'intervallo di alcune ore, e non di alcuni mesi.

Sulla stessa lastra potremo ottenere parecchie immagini della stella che si occultata, anche a distanze dal lembo maggiori della suddetta. per esempio fino ad una distanza uguale al raggio, $25''$ in opposizione, alla quale l'effetto di Einstein sarà poco meno di $0''.02$.

Pensiamo da ultimo che nelle buone determinazioni di parallasse di singole stelle si ottiene un errore probabile di $0''.01$, che è come dire nella misura dello spostamento angolare al massimo di $0''.014$, e che in quelle delle parallassi medie di determinati aggruppamenti di stelle si tenta di avere una precisione notevolmente maggiore, alla quale si può giungere nei

riguardi degli errori sistematici solo con una effettiva maggior precisione nelle misure; pensiamo d'altra parte che con l'andar del tempo si possono prendere in considerazione diverse occultazioni, ed acquisteremo la convinzione che nel modo descritto ci può esser dato di mettere in luce l'effetto di Einstein. Ma, senza dubbio, ad affermarne l'esistenza varranno i risultati concordi delle osservazioni negli eclissi totali e nelle occultazioni prodotte da Giove.

Botanica. — *Prime osservazioni sulla distribuzione degli Imenomiceli umicoli e sui loro probabili rapporti colle micorize ectotrofiche delle fanerogame* ⁽¹⁾. Nota del dott. BENIAMINO PEYRONEL, presentata dal Socio G. CUBONI.

Durante le mie ricerche sulla flora micologica di Val Germanasca, nelli Valli Valdesi del Piemonte, e più specialmente di Riclaretto, mio paese natio, ho avuto l'occasione di fare alcune osservazioni che mi sembrano in stretta relazione con le nostre attuali conoscenze sulle micorize e che, a mio avviso, gettano una luce assai viva sulla questione della natura specifica dei funghi che producono le micorize stesse.

Le mie ricerche non avendo avuto di mira in modo particolare tale argomento, ma piuttosto in generale la distribuzione della flora micologica montana a seconda del variare dei fattori mesologici, s'intende che tali osservazioni, da me fatte specialmente durante la stagione estiva di questi ultimi anni, sono ancora frammentarie e incomplete, e dovranno essere proseguite con maggior metodo e precisione, avendo di mira il problema sopra accennato. Mi sembra tuttavia opportuno renderle di pubblica ragione, richiamando l'attenzione dei naturalisti, e particolarmente dei micologici, sul grande interesse che, da vari punti di vista, presentano gli studi di micogeografia, finora, e specialmente in Italia, quasi affatto trascurati.

Onde rendere più chiara l'esposizione dei fatti che ci interessano, non sarà fuori luogo premettere un brevissimo cenno sulla natura del suolo e sulla flora fanerogama di Riclaretto.

È questo un comunello montuoso di Val Germanasca che prende il suo nome dal torrentello che lo bagna, il Riclaretto o meglio, come si scriveva una volta, Rioclaretto, così chiamato per la perenne limpidezza delle sue acque, scorrenti in un letto molto accidentato, scavato in massima parte nella viva roccia.

I confini naturali di Riclaretto (quelli politici sono un po' più ampi) sono segnati al nord dal corso della Germanasca, e dalle altre parti dalle

(1) Lavoro fatto nella R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

creste montuose che verso questa scendono dal Monte Gran Trùc (2366 m.), sicchè nell'assieme la piccola vallata viene ad essere esposta approssimativamente a tramontana. La pendenza dei declivi varia assai da punto a punto, ma nell'assieme è assai forte: e infatti, sopra una superficie inferiore ai 1200 ettari, abbiamo delle altezze sul livello del mare che vanno dai 600 m. circa a quella massima di 2366 m.

Il suolo è prevalentemente siliceo-argilloso, il terreno geologico essendo formato da micascisti, talcoseisti, cloritescisti quarziti e simili. Ne abbiamo un indice nella diffusione del Castagno, della *Calluna vulgaris*, del *Rhododendron ferrugineum*, piante notoriamente silicicole.

Il Larice è l'essenza arborea che forma i boschi di maggiore estensione, delle vere foreste pure che ricoprono come d'una fascia quasi ininterrotta tutta la zona compresa tra i 1300 e i 1700 m. circa; esso si spinge però anche molto più in su, fin verso i 2200 m., e scende, d'altra parte, fin nella zona del Castagno, diventando tuttavia piuttosto sporadico in mezzo ad altre essenze.

Il Castagno forma dei boschi abbastanza estesi nella regione inferiore del Comune e si spinge fin verso i 1000 m. d'altezza. Le altre Cupulifere, come pure le Salicacee e le Betulacee, non formano dei boschi puri di grande estensione, ma si uniscono a formare dei boschi misti, in cui si riscontrano talora anche dei Larici, dei Tigli, dei Laburni, *Sorbus aucuparia*, *Sorbus Aria*, *Fraxinus excelsior*, ecc.

Fra le Betulacee, però, l'*Alnus viridis*, pur scendendo qua e là fin sotto i mille metri, forma nella zona soprastante a quella del Larice, cioè dai 1700 m. in su, delle estese e dense macchie.

I boschi misti di Cupulifere, Salicacee e Betulacee si trovano sia nella zona del Castagno, sia, e soprattutto, in quella, che altrove corrisponde approssimativamente alla zona del Faggio, compresa tra la prima (1000 m. circa) e quella del Larice (1300 m. circa). Tanto in questa zona dei boschi eterogenei quanto in quella del Castagno si trova la massima parte della superficie coltivata a campi e prati, nei quali abbondano gli alberi fruttiferi, rappresentati esclusivamente da una parte delle Rosacee sopra elencate e dal Noce.

I pascoli aperti abbondano invece nella zona del Larice e sopra ad essa.

Pure dai 1600 m. in su *Rhododendron ferrugineum*, *Vaccinium Myrtillus*, *Vaccinium uliginosum* e *Azalea procumbens*, fra le Ericacee, formano delle estese macchie più o meno pure.

In definitiva il territorio di Rielaretto è ricoperto da campi e prati disseminati di Rosacee e di *Juglans regia*, pascoli aperti, boschi frondosi costituiti in massima parte da Cupulifere, Betulacee e Salicacee, boschi di aghifoglie formati esclusivamente da *Larix decidua*, macchie di *Alnus viridis* e di Ericacee; le altre essenze legnose sono sporadiche, formando solo qua e là dei cespugli o minuscoli boschetti.

Accennato, così, sommariamente alle principali associazioni di fanerogame, vediamo ora se e quali rapporti esistano tra esse e la distribuzione dei funghi a cappello.

Una prima constatazione, nota del resto a tutti, si è che, mentre la flora micologica è bene rappresentata, sia per le numerose specie, sia per la loro abbondanza, nei boschi, essa è invece piuttosto povera nei prati e nei pascoli aperti.

In queste stazioni sono particolarmente bene rappresentati i Gasteromiceti; fra le Agaricacee, vi troviamo numerosi *Hygrophorus*, specialmente nei luoghi umidi e freschi, e numerose jantinospore e melanospore manifestamente coprofile, quali *Agaricus campestris*, varie specie di *Coprinus*, *Panaeolus*, *Stropharia* e simili. Mancano affatto i *Boletus*, le Russule, i Lattari, le Amanite, abbondantemente rappresentati, invece, nei boschi. Nei campi è frequente in autunno *Lepiota procera*.

Della frequenza in tali stazioni di certune di queste specie, la ragione va evidentemente cercata nella presenza di letame nel suolo: ciò vale per *Lepiota procera*, *Agaricus campestris*, per i Coprini, i Paneoli, le Strofarië: tali specie infatti si sviluppano anche indipendentemente da qualunque vegetazione erbacea ovunque si trovi del fimo di animali domestici. Ma in quanto agli *Hygrophorus*, alle *Clitocybe* e ai Gasteromiceti, propendo piuttosto a credere che essi siano in intimi rapporti con la vegetazione erbacea in mezzo alla quale essi si sviluppano; rapporti che possono avvenire sia direttamente per mezzo di micorize, sia semplicemente per mezzo dello scambio di sali attraverso il terreno.

Un altro fatto importante, sul quale devo richiamare l'attenzione del lettore, si è che al piede degli alberi fruttiferi, i quali abbondano appunto nella regione campestre e prativa, non si notano mai funghi caratteristici, ma solo affatto accidentalmente qualche specie propria dei prati e dei campi ed in manifesta indipendenza dalle essenze fruttifere stesse. Lo stesso ho osservato nei boschi e nelle macchie per tutte le essenze legnose della famiglia delle Rosacee, eccettuato *Sorbus aucuparia*, in vicinanza di cui ho qualche rara volta raccolto *Boletus scaber*: devo però avvertire che a poca distanza si trovavano anche dei cespugli di *Corylus Avellana*, alla cui presenza era forse piuttosto legata quella del fungo.

Mancano pure o scarseggiano grandemente gli Imenomiceti umicoli nelle macchie di *Alnus viridis*, di *Rhododendron*, di *Vaccinium* e di *Azalea*, nei boschetti di *Acer*, di *Fraxinus*, di *Ulmus* e di *Salix alba*, non ne ho trovati mai in vicinanza dei cespugli di *Rhamnus*, di *Sambucus*, di *Lonicera*. Riguardo a *Salix Caprea* e a *Cytisus Laburnum* non posso per ora affermare nulla di sicuro, questi arboscelli trovandosi per lo più dispersi in mezzo ad altre essenze. Ricordo però d'aver raccolto parecchi anni or sono al piede d'un Laburno una Agaricacea (*Tricholoma* ?) che emanava intensamente il

gradevole e caratteristico profumo dei fiori di quella leguminosa. Ai piedi dei Tigli ho raccolto *Hydnum repandum* e qualche *Russula*; anche questa essenza, però, è assai sporadica e quindi non ho avuto altra occasione finora di fare che poche osservazioni sulla sua micoflora.

Fra le Salicacee, mentre *Salix alba*, come abbiamo visto, sembra mancare di funghi a cappello, *Populus tremula*, invece, è accompagnata da una numerosa coorte di Russule, di Lattari ed altre Agaricacee leucospore; fra le Poliporacee, *Boletus rufus* è pure comunissimo ai suoi piedi e sembra essergli esclusivo.

Anche le Betulacee si comportano in modo assai diverso dal punto di vista che ci interessa. Mentre, infatti le macchie di *Alnus viridis*, come già ho detto, non sembrano possedere specie caratteristiche, *Betula alba*, invece, è spesso accompagnata da *Boletus scaber*, da *Amanita muscaria* e probabilmente anche da varie specie di Russule e di Lattari. Quanto ad *Alnus glutinosa* è certamente molto povera di funghi: devo però dire che ho spesso riscontrato ai suoi piedi una caratteristica specie di *Lactarius*, molto minuta, che non mi è riuscito ancora di determinare.

Dove la flora degli Imenomiceti unicoli presenta la massima ricchezza e varietà è, senza contrasto, nei boschi di Cupulifere e di Larice. La flora imenomicetica dei boschi di Cupulifere presenta però uno spiccato contrasto con quella dei boschi di Larice: contrasto che si può all'ingrosso definire a questo modo: i boschi di Cupulifere rappresentano il regno delle Agaricacee, quelli di Larice il regno dei Boleti.

Non bisogna però credere che le stesse specie fungine si sviluppino indifferentemente sotto tutte le Cupulifere: anche qui si può dire che ogni essenza è caratterizzata da una micoflora particolare, costituita da specie che si riscontrano più o meno esclusivamente sotto di essa.

Vi sono poi certe specie fungine, come ad esempio *Boletus scaber*, che, pur trovandosi tanto sotto il Castagno, quanto sotto il Rovere, il Faggio e il Nocciuolo, assumono un aspetto diverso, abbastanza caratteristico e costante per ognuna di tali essenze. Le Russule e i Lattari sembrano predominare nei boschi di Castagni e di Quercie, ove sono abbondantissimi, e quivi pure troviamo di preferenza le Amanite, sempre però piuttosto sporadiche: i fitti ed ombrosi boschi di Faggio e di Nocciuolo sembrano invece caratterizzati dalla frequenza dei Cortinari e dall'abbondanza di *Cantharellus* e di *Hydnum repandum*, i quali ultimi si trovano però, benchè meno abbondanti, non solo sotto le Quercie e i Castagni, ma anche sotto le Betulle e i Larici. Anche *Boletus edulis*, frequentissimo sotto i Castagni, non è raro nei boschi di Faggio e di Larice.

L'accennata differenza tra boschi di Castagni e Quercie da una parte, con predominio di Russule e Lattari, di Faggio e Nocciuolo dall'altra, con frequenza di *Cortinarius*, potrebbe però essere accidentale e dipen-

dere unicamente dal fatto che i primi sono in generale più soleggiati dei secondi.

Molto caratteristica è la flora imenomicetica dei boschi di Larice; quivi, infatti, non solo troviamo un'abbondanza straordinaria di Boleti, ma varie specie di questi sono esclusive del Larice; tali sono *Boletus elegans*, *B. laricius* e *Boletinus cavipes*: cerchereste invano queste specie nei boschi di latifoglie, mentre esse ricoprono quasi letteralmente il suolo delle foreste di Larice in agosto e settembre, se la stagione procede normalmente piovosa. Anche *Amanita muscaria* vi è molto frequente, specialmente verso la fine di settembre, quando già i Boleti o sono scomparsi o sono in piena regressione. Fra le altre Agaricacee sembrano esclusive dei Larici due Russule: *Russula ochroleuca* e un'altra specie assai grande, carnosa, dal cappello bruno-terreo, dalla carne caseosa, che non mi è riuscito finora di determinare; e forse *R. fallax*, da taluni, però, considerata come semplice varietà di *R. emetica*.

Propri dei boschi laricini e abbastanza comuni sono pure due Lattari, *Lactarius rufus* e *Lac. sp. indet.*, nonchè *Gomphidius gracilis* fra le Ocospore.

Abbastanza frequenti, ma non esclusivi dei boschi di Larice sono *Amanitopsis vaginata*, *Clitocybe laccata*, *Russula foetens*, *Cantharellus edulis*, *Paxillus lateralis*, *Boletus edulis*, *B. subtomentosus*, *B. badius*, *B. piperatus*.

In conclusione noi possiamo affermare:

1°) I boschi di *Larix decidua* abbondano di Imenomiceti umicoli e particolarmente di Boleti.

2°) I boschi di Cupulifere sono altrettanto ricchi quanto quelli di Larice, ma con predominio delle Agaricacee sulle Poliporacee.

3°) Nella famiglia delle Salicacee, *Populus tremula* è sempre accompagnata da una ricca coorte di Imenomiceti umicoli, mentre *Salix alba* ne è priva.

4°) *Betula alba*, fra le Betulacee, è accompagnata da un discreto numero di funghi umicoli; sotto *Alnus glutinosa* ho spesso trovato un *Lactarius*; *Alnus viridis* sembra mancare di funghi umicoli caratteristici.

5°) Le essenze legnose appartenenti alle altre famiglie, eccettuati *Tilia vulgaris* e forse *Cytisus Laburnum*, *Sorbus Aucuparia*, non sono mai accompagnati da Imenomiceti umicoli.

6°) I prati e pascoli erbosi sono caratterizzati dalla presenza di molte specie del genere *Hygrophorus*, e da Agaricacee manifestamente coprofile, appartenenti ai generi *Agaricus*, *Coprinus*, *Stropharia*, *Panaeolus* e affini, nonchè dai Gasteromiceti.

Da quanto precede, lasciando da parte, per maggior semplicità, le stazioni erbose costituite da troppe specie fanerogame, risulta evidente il fatto

che ogni essenza legnosa è accompagnata da una florula caratteristica di Agaricacee e Boletinee umicole. Questa florula è costituita da alcune specie che si dimostrano esclusive d'una essenza legnosa determinata, oppure di un gruppo di essenze tra loro affini (p. es. le Cupulifere) e da altre specie le quali sembrano crescere più o meno indifferentemente sotto un gran numero di essenze disparate.

Come si possono interpretare tali differenze?

Il modo più ovvio e più semplice di spiegare il fatto sembrerebbe a prima vista di farlo dipendere da ciò, che i funghi vivono a spese dell'*humus* formato dai detriti (rami e foglie caduti) dell'essenza legnosa al cui piede si sviluppano, *humus* che varia, naturalmente, da essenza ad essenza.

Questa era, del resto, la mia opinione durante le mie prime ricerche, se non che una osservazione fatta su *Boletus elegans* mi dimostrò come tale interpretazione non possa assolutamente applicarsi a tutti i casi.

Ho detto più sopra come il Larice scenda a Riclaretto fin nella zona del Castagno; ma sotto i 1300 m. esso diventa sporadico ed è per lo più rappresentato qua e là da qualche individuo isolato in mezzo ai boschi di latifoglie. Ora più volte mi accadde, nell'esplorare il suolo di qualche bosco frondoso, di trovarmi ad un tratto davanti a caratteristici esemplari di *Boletus elegans*. Sapendo che questa specie è esclusiva del Larice, cercavo naturalmente se nelle vicinanze ve ne fosse qualche esemplare, e non mi è mai capitato di non trovarcelo, ma talora era ad una distanza abbastanza considerevole, tale che era impossibile che le foglie ed i rami suoi venissero a formare umus nel posto ove si trovava il Boletto; spesso anzi l'umus era formato dalle latifoglie più vicine! Bisogna perciò ammettere che corressero dei rapporti tra il fungo e le radici del Larice. Così pure ho più volte avuto l'occasione di osservare che, quando un bosso confina con un prato, i funghi non si sviluppano soltanto sotto la chioma degli alberi ove abbonda l'umus, ma anche, e talora anche di più, nel prato fino ad una distanza abbastanza considerevole; ora era impossibile nei casi da me osservati che i funghi vivessero a spese dell'umus formato dai detriti arborei, sia perchè questi non potevano arrivare in quantità apprezzabile fino a tale distanza, sia soprattutto, perchè essi vengono a Riclaretto allontanati più volte all'anno durante le pratiche agricole.

Richiamata da questi fatti la mia attenzione sulla probabilità di rapporti tra le radici degli alberi e i funghi a cappello, non mi è stato difficile di constatare più volte — i Larici e i Pioppi si prestano particolarmente bene a tali osservazioni — lo stretto rapporto tra la distribuzione dei funghi attorno ad un albero e il percorso delle radici di questo.

I rapporti tra radici e funghi mi sembrano perciò fuori dubbio.

Tali rapporti si possono interpretare in due modi: o essi avvengono direttamente per mezzo di micorize, oppure anche i funghi assorbono dal

terreno delle sostanze secrete dalle radici e necessarie al loro sviluppo. È noto, infatti, come tanto le radici degli alberi quanto il micelio dei funghi non si limitino ad esercitare un assorbimento elettivo dei composti disciolti nel terreno, ma ne cedano a questo altri inutili o dannosi al loro organismo.

Per parte mia propendo a credere che ambedue questi generi di rapporti si verifichino in natura. Comunque, però, mi sembra fuori di dubbio che molte Agaricacee e Boletinee umicole formino delle micorize ectotrofiche e ciò per la ragione seguente.

Se noi confrontiamo i risultati sovra esposti, circa la distribuzione degli Imenomiceti umicoli, con quanto si sa oggi giorno sulle micorize, salta agli occhi questo fatto: *Le essenze legnose sotto le quali abbondano i funghi a cappello sono precisamente quelle le quali possiedono delle micorize ectotrofiche, mentre le essenze prive di Imenomiceti o possiedono micorize endotrofiche o non ne possiedono affatto.*

Questa constatazione viene a recare un valido appoggio all'opinione di coloro, i quali pensano che le micorize siano prodotte in massima parte da funghi appartenenti al gruppo dei Basidiomiceti.

Chimica. — *Sopra un prodotto della deflagrazione della nitrocellulosa* ⁽¹⁾. Nota di ELIGIO TRAPANI, presentata dal Socio A. ANGELI.

In questi ultimi tempi ho avuto frequentemente occasione di dover distruggere, facendoli deflagrare, i residui delle polveri infumi che avevano servito alle varie ricerche chimiche e determinazioni di stabilità al calore, e più volte ho potuto constatare che, assieme a quello caratteristico dei vapori nitrosi, si avvertiva un odore molto più pungente e che molto rassomiglia a quello della formalina, la soluzione acquosa di formaldeide che viene adoperata come disinfettante. Ne ho parlato al prof. Angeli, il quale si è subito interessato della cosa e sotto la sua guida ho eseguite le esperienze preliminari che comunico in questa Nota, le quali dimostrano che con tutta probabilità si tratta realmente di formaldeide.

Io ho incominciato dall'esaminare la balistite, tanto con anilina che senza, le corditi, che come è noto sono costituite da nitroglicerina e nitrocellulosa, e le polveri a sola nitrocellulosa.

Per la ricerca della formaldeide mi sono giovato della bella reazione di Rimini ⁽²⁾, la quale permette di svelare la presenza anche di piccolissime quantità di tale sostanza, e che consiste, come è noto, nel trattare i

⁽¹⁾ Ricerche eseguite nel R. Laboratorio per le sostanze esplosive in Roma.

⁽²⁾ Bull. Soc. chim. de France (3) 20 (1898), 896.

liquidi che la contengono con cloridrato di fenilidrazina e nitroprussiato sodico: per aggiunta di alcali si forma una colorazione azzurra che poi lentamente volge verso il rosso.

Si pone un frammento dell'esplosivo, qualche centigrammo, sul fondo di un tubo da saggio e si riscalda con cautela fino a che è avvenuta la deflagrazione: assieme a quello dei vapori rossi, si avverte subito l'odore pungente di cui ho fatto parola. Dopo raffreddamento si pone acqua fino alla metà del tubo da saggio; ma siccome il liquido contiene acido nitroso, che reagirebbe subito per conto proprio con la fenilidrazina e turberebbe la reazione, così è necessario aggiungere dapprima carbonato sodico; si agita, si aggiunge il cloridrato di fenilidrazina con un paio di gocce di soluzione recente di nitroprussiato sodico: si agita, dopo un paio di minuti si rende alcalino con potassa e così comparisce immediatamente la caratteristica colorazione azzurra. È sufficiente qualche centigrammo di esplosivo per colorare intensamente tutto il contenuto di un ordinario tubo da saggio. Se anche la reazione è molto sensibile, ciò dimostra che la formaldeide si forma sempre in quantità notevole.

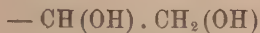
In questo modo si comportano la balistite, le corditi e le polveri infumi contenenti solamente nitrocellulosa, accuratamente private dal solvente residuo.

Con la nitroglicerina sola non ho ancora provato.

La presenza dell'aldeide formica non era stata ancora riscontrata fra i prodotti di deflagrazione delle polveri contenenti nitrocellulose; il prof. Angeli mi ha detto di non averne trovata parola nei trattati sopra le materie esplosive e per la nitroglicerina e nitrocellulosa separate nemmeno nei grandi trattati di chimica organica. Solamente nelle celebri Ricerche di Sir Frederick Abel si trova un cenno sopra un « odore pungente », oppure sopra un « odore pungente nel quale però non si riconosce quello dell'acido nitroso », che manifesta la nitrocellulosa per azione della luce ⁽¹⁾ oppure del calore ⁽²⁾, senza che sia però determinato a quale prodotto tale odore sia dovuto.

Ancora non è possibile di stabilire a quale reazione sia da attribuirsi la formazione della formaldeide; non sono note le formole di struttura delle nitrocellulose e nemmeno quella della cellulosa, ed in ogni caso si tratta di processi molto complicati.

Si comprende subito però che la formaldeide potrebbe derivare da residui:

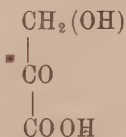


che forse preesistono nella nitrocellulosa, ovvero da catene analoghe che pos-

⁽¹⁾ Abel. *Untersuchungen über Schiessbaumwolle*. Traduzione del dott. B. Pleus. Parte II (Berlino, 1907), pp. 17, 18, 20 e seg.

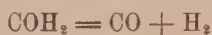
⁽²⁾ Ibid., pp. 61, 62 e seg.

sono formarsi in una prima fase della decomposizione, in seguito ai cosiddetti processi di denitrificazione. È noto infatti che per azione del calore oppure della luce, dalla nitrocellulosa si formano prodotti, che riducono il liquido di Fehling; ed O. Silberrad e R. Crosbie Farmer ⁽¹⁾ hanno trovato che la nitrocellulosa, per azione del calore fornisce anche acido ossipiruvico:



Si comprende subito come queste sostanze possano scindersi ulteriormente con formazione di aldeide formica.

Accennerò infine che la presenza di formaldeide è molto probabilmente in relazione anche con l'ossido di carbonio e con l'idrogeno:



che si riscontrano fra i prodotti di esplosione della nitrocellulosa.

Appena le altre occupazioni me lo permetteranno, vedrò se è possibile riscontrare la formaldeide anche nelle polveri avariate, giacchè in questo caso la sua presenza potrebbe interessare forse quanto quella dei prodotti nitrosi.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente RÖTTI dà il triste annuncio della perdita fatta dall'Accademia, nelle persone dei Soci: BAZIN ENRICO, morto il 14 febbraio 1917; faceva parte dell'Accademia come Socio straniero per la *Meccanica*, dal 13 febbraio 1890; — DARBOUX GASTONE, mancato ai vivi il 23 febbraio 1917; apparteneva anch'egli all'Accademia come Socio straniero per la *Matematica*, sino dal 13 febbraio 1890.

Il Socio VOLTERRA con elevate e commosse parole riassume l'opera scientifica del Darboux, le cui scoperte, specialmente nella geometria differenziale, lo collocarono fra i più grandi matematici del nostro tempo; ricorda inoltre la deferenza e la stima dall'illustre estinto professata verso i matematici italiani.

⁽¹⁾ Journal of the chemical Society, luglio, 1906, pag. 1183.

Il Socio DE STEFANI legge la seguente commemorazione dell'Accademico prof. FRANCESCO BASSANI.

L'anno decorso cessava di vivere Francesco Bassani. Già prima Socio Corrispondente, da undici anni, dal 21 agosto 1905, era stato nominato nostro Socio Nazionale. Egli fu degnamente ricordato da ciascuno dei numerosi Istituti e Società dei quali fece parte e vanno rammentate le affettuose commemorazioni che di lui fecero due suoi diletti discepoli, il nostro collega De Lorenzo ed il prof. D'Erasmo.

È doveroso il mesto tributo anche a noi ed in ispecie a me, dolente, quasi coetaneo e conterraneo, che avevo diviso con lui, come con gli altri colleghi, l'apostolato della scienza geologica e il desiderio di renderla vieppiù degna dei nostri maestri e della nostra patria.

Non è mia intenzione di passare in rassegna i numerosi lavori del Bassani, la qual cosa, in parte fatta da altri, renderebbe necessaria una assai lunga e completa biografia e bibliografia; ma riassumerò, almeno per sommi capi, quanto egli fece fino a che una dura malattia, a lui consapevole, tolse negli ultimi anni le forze, non la volontà del lavoro.

Nato a Thiene in provincia di Vicenza il 29 ottobre 1853 e compiuti i primi studi, si iscrisse all'Università di Padova e frequentò la scuola di Giovanni Omboni, geologo positivo, che insegnava la scienza schietta come era allora, non complicata da quelle farragini teoriche sopravvenute coi geologi da tavolino d'oltr'Alpe, nelle quali ha in parte incespicato dappoi. Acquistata con onore la laurea nel 1875 e nominato dal maestro suo assistente di Mineralogia e Geologia, dopo due anni ottenne un posto di perfezionamento all'estero, e nel 1877 seguì in Parigi alla Sorbona i corsi di Edmondo Hébert, nonchè gli ammaestramenti di Gaudry, Gervais, Sauvage e di altri valenti. Confermatogli il posto nel 1878 si recò a Vienna presso Edoardo Suerf e Melchiorre Neumayr, poi a Monaco da Alfredo Zittel, maestri di coscienza, ai quali da ogni parte di mondo, fin dal Giappone accorrevano gli studiosi, sapienti maestri tutti e questi ultimi non ancora pervasi da quella smania di grandezza e di superiorità fuor di luogo che ha fatto poi velo ad altri loro compaesani assai minori, pur nati e cresciuti alla medesima scuola.

Tornato in Italia, dopo essere stato otto anni nell'istruzione secondaria, fu nel 1887 chiamato ad insegnare geologia, poi anche Paleontologia nell'Università di Napoli, e quivi presso a Capri finì la vita.

Fin da quando era stato assistente dell'Omboni egli si era dedicato allo studio dei pesci fossili e questo fu l'occupazione principale della sua vita. Nella difficile materia egli era fra le primarie autorità d'Europa, e molte sue pubblicazioni comparvero negli Atti di Istituti e di Accademie francesi ed austriache, alcune nella lingua loro, altre nella lingua nostra italiana.

Di più d'un centinaio di sue pubblicazioni almeno una sessantina riguardano pesci di ogni parte d'Europa, ma specialmente d'Italia e di regioni finitime come S. Agata presso Gorizia, Lesina e Comen: ma pur si era occupato di pesci di Francia, del Württemberg e di altre ittiofaune straniere. Nè si era limitato con ciò allo studio paleontologico, bensì era riuscito pure a stabilire l'età controversa di molte fra le dette faune. La sua diletta moglie Everdina Dekker, olandese, esimia disegnatrice, lo aiutava con gli artistici ma pure sempre scrupolosi disegni degli esemplari che egli illustrava. È curioso notare che, mentre nei primi tempi, come dal più al meno tutti i giovani, era propenso a scernere i più minuti caratteri biologici ed a moltiplicare le cosiddette specie, con l'esperienza prolungata e con l'età era giunto invece, come pure ad altri avviene, a concludere, talora, credo, con troppo eccesso, che le specie si susseguono senza alterazione a traverso parecchie generazioni e a traverso più o meno lunghe età geologiche.

Nè solo di pesci si occupò; ma ebbe pure a trattare di altri argomenti paleontologici e di varie questioni strettamente geologiche riguardanti soprattutto l'Italia meridionale. Così scrisse della solfatara di Pozzuoli, del Vesuvio, della penisola di Sorrento, del Monte Consolino, dei dintorni di Pignataro Maggiore, degli scavi di Capri, sempre con la sua solita diligenza. In taluni di questi studi non disdegnò di avere a collaboratori alcuni dei suoi allievi. De Lorenzo, Galdieri, D'Erasmo, od amici e colleghi come il Chistoni ed il Misuri.

Buon dicitore ed efficace insegnante amò come padre i discepoli e da questi fu in pari modo amato.

Non procacciatore di onori, questi vennero a lui, sebbene non forse quanti la sua sapienza meritava e quanti ne avrebbe avuti se li avesse cercati; d'altri non invidioso fu largo di consigli e di aiuti ai richiedenti. Gentiluomo perfetto, amico fidato, estimatore degli scienziati stranieri chè la scienza non ha patria, ma pensieroso sempre, con efficacia, di tenere altissima quella italiana, morì il 26 aprile 1916 lontano dalla casa materna, alla quale da tutti amato e desiderato tornava ogni anno per rinfrancarsi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario MILLOSEVICH presenta le pubblicazioni giunte in dono, tra le quali segnala quelle dei Soci seguenti: PIROTTA: *L'origine di nuove specie secondo la teoria dell'incrocio*; LIPPMANN: *Variations de la chaleur spécifique des gas avec la pression*. Fa inoltre menzione di una raccolta di pubblicazioni del Corr. GUIDI CAMILLO, rilevandone i pregi e la importanza, ed osservando che alcune delle pubblicazioni suddette tro-

varono accoglienza pratica, come quella sui tubi in cemento armato, la cui teoria fu applicata all'acquedotto Pugliese; e che altre furono riprodotte o per disteso o per recensione negli « Annales des Ponts et Chaussées », nel « Génie Civil » ecc.

Finalmente lo stesso SEGRETARIO fa menzione del vol. II-2 dell'*Epistolario di Berzelius*, edito per cura dell'Accademia delle scienze di Stoccolma; e di un opuscolo che ricorda le onoranze tributate dal Municipio di Bergamo al Socio prof. TORQUATO TARAMELLI.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA
presentate nella seduta del 4 marzo 1917.

- BERZELIUS JAC. — Bref utgifna af Kungl. Svenska Vetenskapsakademien gemon H. G. Söderbaum. Uppsala, 1916. 8°. pp. 1-356.
- CAVASINO A. — Frequenza e distribuzione dei terremoti italiani nel ventennio 1891-1910 (Estr. dal « *Bullettino della Soc. Sismologica Italiana* », vol. XX, pp. 1-25). Modena, 1916. 8°.
- D'ACHIARDI G. — Credenze e teorie sull'origine dei minerali e dei loro giacimenti (Estr. dagli « *Annali delle Università toscane* », vol. I, pp. 1-28. Pisa, 1916. 8°.
- DE TONI G. B. — Analisi microscopica di alcuni saggi di fitoplancton raccolti dalla R. N. « *Liguria* » (Estr. dalle « *Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere, ed arti* », vol. XXIX, pp. 1-33. Venezia, 1916. 4°.
- DE TONI G. B. — Catalogo delle Alghie raccolte nella regione di Bengasi da R. P. D. Vita Zanoni (Estr. dagli « *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere, ed arti* », vol. LXXVI, pp. 1-22). Venezia, 1916. 8°.
- DE TONI G. B. — Seconda contribuzione alla flora algologica della Libia italiana (R. Comitato Talassografico Italiano. Mem. XLI). Venezia, 1914. 4°, pp. 1-32.
- DE TONI G. B. — Terza contribuzione alla flora algologica della Libia (Estr. dagli « *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti* », vol. LXXIII, pp. 1142-1551). Venezia, 1914. 8°.
- FORTI A. — Analisi microscopica di alcuni saggi di fitoplancton raccolti dalla R. N. « *Liguria* » (Estr. dalle « *Memorie del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti* », vol. XXIX, pp. 1-33). Venezia, 1916. 4°.
- FORTI A. — Catalogo delle Alghie raccolte nella regione di Bengasi da R. P. D. Vita Zanoni (Estr. dagli « *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti* », vol. LXXVI, pp. 1-22). Venezia, 1916. 8°.
- FORTI A. — Notizie biografiche di Alberto Grunow (1826-1914). Padova, 1915. 8°, pp. 1-40.
- FORTI A. — Seconda contribuzione alla flora algologica della Libia Italiana (R. Comitato Talassografico Italiano. Mem. XLI). Venezia, 1914. 4°, pp. 1-32.
- FORTI A. — Terza contribuzione alla flora algologica della Libia (Estr. dagli « *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti* », vol. LXXIII, pp. 1142-1551). Venezia, 1914. 8°.
- GUIDI C. — Assemblage de l'ame des poutres à I (Sonderdruck aus der « *Eisenbau* », 1. Jahr. Ss. 185-186). Leipzig, 1910. 4°.
- GUIDI C. — Il frettage nelle travi inflesse (Estr. dal « *Giornale del Genio Civile* », pp. 1-14). Roma, 1914. 8°.
- GUIDI C. — Lezioni sulla scienza delle costruzioni. La trave solidale coi piedritti. Torino, 1916. 8°, pp. 1-32.
- GUIDI C. — Proposta di modificazioni alle prescrizioni normali per l'esecuzione delle costruzioni in cemento armato. Roma, 1914. 8°, pp. 1-18.
- GUIDI C. — Prove comparative su travi in beton armate con tondini o con quadretti tipo Jonson (Estr. da « *Il Cemento* », pp. 1-12). Milano, 1910. 8°.
- GUIDI C. — Prove di resistenza sulla ghisa (Estr. dall' « *Ingegneria ferroviaria* », Roma, 1914. fol.
- GUIDI C. — Sollecitazioni nell'armatura dell'ala di un biplano in linea di volo, prodotte dal sostegno dell'aria (Estr. dagli « *Atti della R. Accademia delle*

- Scienze di Torino », vol. LII, pp. 87-96). Torino, 1916. 8°.
- GUIDI C. — Sollecitazione prodotta nei pali di una conduttura elettrica per strappamento completo di una tesata (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LII, pp. 226-332). Torino, 1916. 8°.
- GUIDI C. — Sul calcolo della lastra rettangolare (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », pp. 1-4). Torino, 1914. fol.
- GUIDI C. — Sul calcolo della trave viendeel (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », pp. 1-14). Roma, 1916. 8°.
- GUIDI C. — Sul calcolo statico dei serbatoi cilindrici in beton armato (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVIII, pp. 199-208). Torino, 1913. 8°.
- GUIDI C. — Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVII, pp. 1-18). Torino, 1912. 8°.
- GUIDI C. — Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro. Nota II (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVII, pp. 1-15). Torino, 1912. 8°.
- GUIDI C. — Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », pp. 1-3). Roma, 1912. 8°.
- GUIDI C. — Sulle deformazioni dei tubi di grande diametro per condotte d'acqua (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. XLVIII, pp. 358-369). Torino, 1913. 8°.
- GUIDI C. — Sulle dighe a volta (Estr. dal « Giornale del Genio Civile », pp. 1-11). Roma, 1917. 8°.
- GUIDI C. — Sulle formole del portale (Estr. dalla Rivista « Il Cemento », pp. 1-3). Torino, 1916. foll.
- LURIA A. — Aerofuoco (cioè faro per aeronavigazione) a lampi singoli, od a gruppi semplici o composti di lampi, tipo « Luria » a proiettore con riflettore ausiliario. Torino, 1916. 4°, pp. 1-9.
- LURIA A. — Fuoco (Fanale) ad intermittenza per aeronavigazione, atto altresì a funzionare da telegrafo ottico per trasmettere messaggi ai velivoli. Torino, 1917. 4°, pp. 1-11.
- LUSSANA S. — Sul calore specifico dei liquidi a pressione costante per pressioni e temperature diverse (Estr. dal « Nuovo Cemento », vol. VII, pp. 1-11). Pisa, 1914. 8°.
- LUSSANA S. — Variation de la chaleur spécifique des gaz avec la pression (Extrait des « Annales de physique », pp. 345-356). Paris, 1916. 8°.
- Onoranze al prof. Torquato Taramelli. Bergamo, 1916. 4°, pp. 1-31.
- PIROTTA R. — L'origine di nuove specie secondo la teoria dell'incrocio (Estr. da « Scientia ». Rivista di Scienza, vol. XXI, pp. 1-11). Bologna, 1917. 8°.
-

